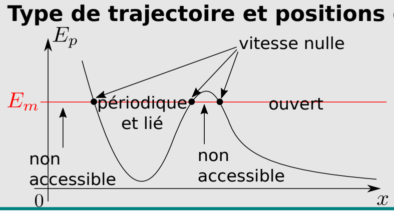
Mécanique
Chapitre 3

Énergie en mécanique

(mouvements conservatifs à 1D)

V Mouvement conservatif à un degré de liberté

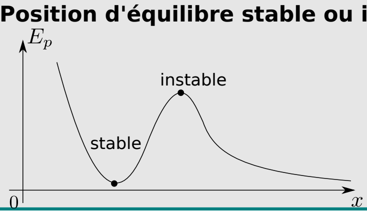
1 - Type de trajectoire et positions de vitesse nulle



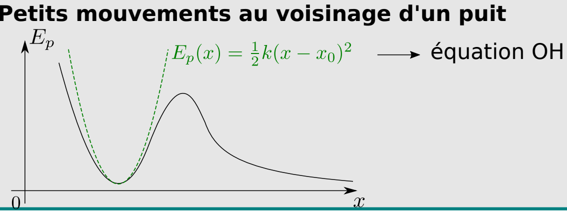
2 - Franchissement d'une barrière de potentiel

Quelle énergie fournir ?

3 - Position d'équilibre stable ou instable



4 - Petits mouvements au voisinage d'un puit



Ce qu'il faut savoir faire

(cours : V)

- ▶$_1$ Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif (bornée ou non, points où $\vec{v} = \vec{0}$). → cours V.1
- ▶$_2$ Évaluer l'énergie minimale pour franchir une barrière de potentiel. → **EC5**
- ▶$_3$ Déduire d'un graphe d'E_p les positions d'équilibre (stables ou instables). → cours V.3, TD VI
- ▶$_4$ Étudier les petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre via une approx. harmonique. → TD VII

Exercices de cours

Exercice C5 – Franchissement d'une barrière de potentiel

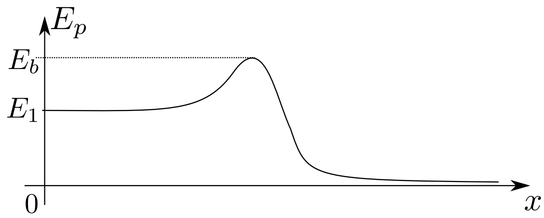
On considère l'énergie potentielle ci-contre, qui peut correspondre à une bille glissant sans frottements sur un sol dont la topographie est celle du graphique : altitude h_1 en $x = 0$, franchissement d'un col d'altitude h_b, puis altitude nulle lorsque $x \to +\infty$. La bille est lancée en $x = 0$ avec une vitesse v_0 en direction des x croissants.

1 - Justifier que l'énergie mécanique de la bille reste constante au cours du temps.

2 - Montrer que la bille atteint tout juste le haut du col pour une valeur particulière de sa vitesse initiale v_0, que l'on exprimera en fonction de m, E_1 et E_b.

3 - Que se passe-t-il si v_0 est inférieure à cette valeur limite ? Et supérieure ?

4 - Exprimer enfin v_0 en fonction de m, g, h_1 et h_b.



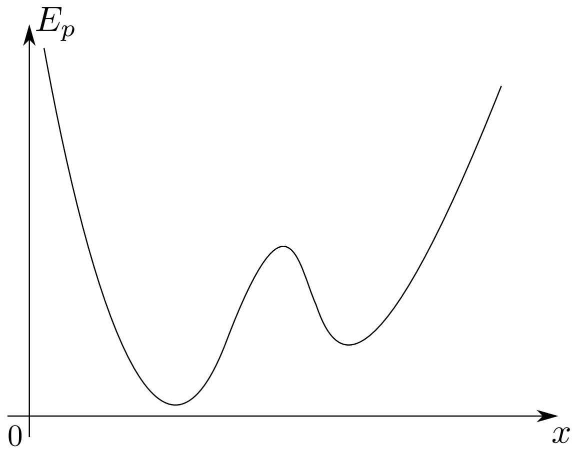
Cours

V – Mouvement conservatif à un degré de liberté

Introduction du problème et graphe d'énergie potentielle

Dans toute cette partie on considère :

- un point matériel M soumis seulement à des forces conservatives, qui dérivent d'une énergie potentielle totale E_p ;
- une situation à un degré de liberté, par exemple un mouvement selon un axe x et donc une énergie potentielle $E_p(x)$ (graphe ci-contre) ;
- on note $\vec{F} = F(x)\,\vec{e}_x$ la force totale s'exerçant sur M et dérivant de E_p.



tracé de $E_p(x)$, à compléter

On peut imaginer qu'on décrit l'évolution d'un mobile glissant sans frottement sur une surface courbe dont la hauteur $z = z(x)$ correspond à $E_p(x) = mg\,z(x)$. Mais la situation décrite est bien plus générale.

Nous allons voir que le graphe d'énergie potentielle permet d'obtenir beaucoup d'informations sur les mouvements possibles.

1 – Type de trajectoire et positions de vitesse nulle

L'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p(x)$ est constante au cours du mouvement (car conservatif). Sa valeur est donnée par les conditions initiales.

On peut la tracer sur le graphe d'énergie potentielle ci-dessus.

$\rightsquigarrow_1$ Montrer simplement que $\forall t$, $E_m \geq E_p(x)$, et que $E_m = E_p(x)$ signifie que $v = 0$ au point x.

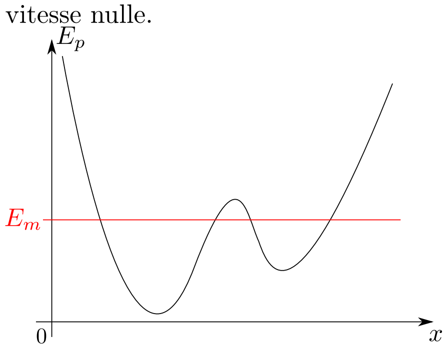
– $E_m = \dfrac{1}{2}mv^2 + E_p(x) \geq E_p(x)$ car le terme en v^2 est positif ou nul.

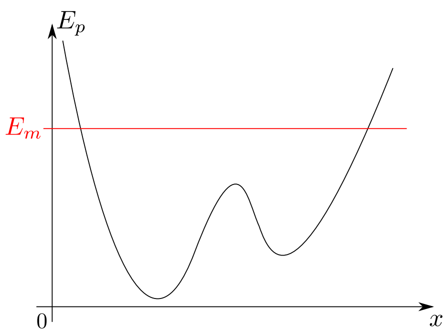
– $E_m = E_p(x) \quad \Leftrightarrow \quad E_c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0.$

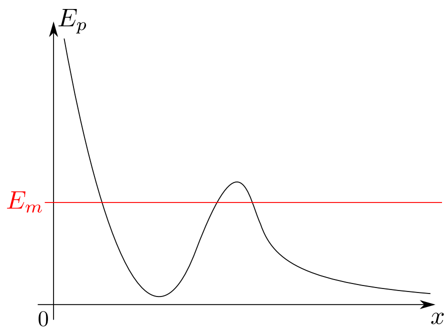
Méthode : analyse d'un graphe d'énergie potentielle (1)

- Les conditions initiales déterminent la valeur (constante) de E_m, que l'on trace sur le graphe de $E_p(x)$.
- Les mouvements possibles vérifient $E_p(x) \leq E_m$: ceci permet de savoir si le mouvement est périodique ou non, si la trajectoire est bornée ou non.
- Les points d'intersection de E_m et de $E_p(x)$ sont des points de vitesse nulle.

$\rightsquigarrow_2$ Compléter les schémas ci-dessous en indiquant le type de mouvement possible dans chaque zone, et les points de vitesse nulle.







graphes à compléter

2 – Franchissement d'une barrière de potentiel

On appelle barrière de potentiel une zone de l'espace où le potentiel $E_p(x)$ admet un maximum local.
Il est alors intéressant de se demander sous quelle condition un mobile peut franchir cette barrière.

$\rightsquigarrow_3$ Faire l'exemple décrit dans l'**EC5**.

3 – Positions d'équilibre stables ou instables

Rappel du III.3 : la force est donnée par $\vec{F} = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\vec{e}_x$.

$\rightsquigarrow_4$ D'après ce résultat, que vaut la force en un point où $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = 0$? Comment peut-on appeler un tel point x ?

On a alors $\vec{F} = \vec{0}$. Si le mobile est en ce point avec une vitesse nulle, alors il y reste : c'est une position d'équilibre.

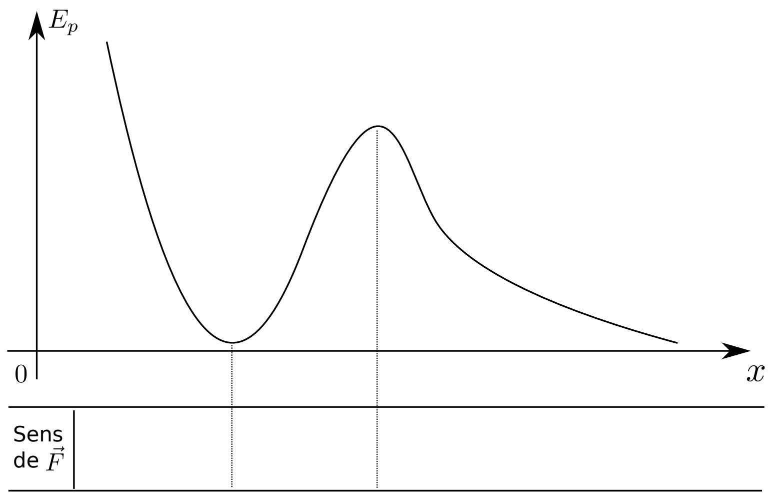
Les positions d'équilibre peuvent être de deux types :

- Elle est stable lorsqu'un petit mouvement du point M entraîne un retour vers la position d'équilibre.
- Elle est instable lorsqu'un petit mouvement du point M entraîne un éloignement de la position d'équilibre.

Exemples : une bille au fond d'un bol (équilibre stable), un stylo posé sur sa pointe (équilibre instable).

$\rightsquigarrow_5$ Sur le graphe ci-contre, faire apparaître le sens de la force $\vec{F}$ (vers la gauche ou vers la droite ?) autour de chaque position d'équilibre, et en déduire la stabilité de ces positions. Conclure sur un critère de stabilité à partir du graphe de $E_p(x)$.

graphe à compléter



Méthode : analyse d'un graphe d'énergie potentielle (2)

- Les positions x où $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x) = 0$ sont des positions d'équilibre.
- La stabilité de l'équilibre est donnée par le signe de $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x)$:
  - stable si $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2} > 0$ (graphe du type $f(x) = x^2$ pour lequel $f'' = 2 > 0$) ;
  - instable si $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2} < 0$ (graphe du type $f(x) = -x^2$).

4 – Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable

Notion mathématique : développement limité

Soit f une fonction (suffisamment dérivable) et x_0 un point.
On peut approcher les valeurs de f autour du point x_0 à l'aide d'un développement limité :

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{(x-x_0)f'(x_0)}_{\text{terme d'ordre 1}} + \underbrace{\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)}_{\text{terme d'ordre 2}} + \underbrace{\frac{(x-x_0)^3}{3!}f^{(3)}(x_0)}_{\text{terme d'ordre 3}} + \underbrace{\mathrm{o}\Big((x-x_0)^3\Big)}_{\text{termes négligeables devant les autres}}$$

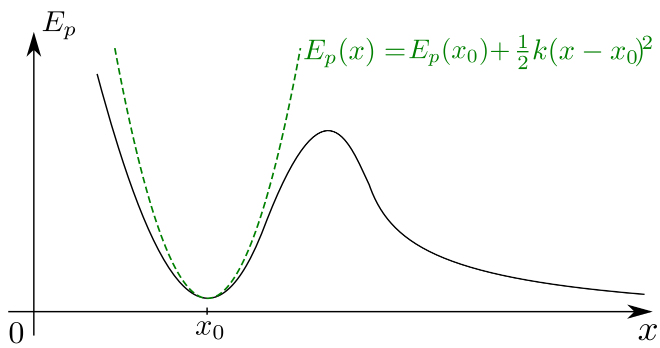
Nous l'avons écrit à l'ordre 3 ci-dessus, mais il peut être mené à n'importe quel ordre.
L'écriture de chaque terme permet d'être de plus en plus précis dans la description de f autour de x_0.

a/ Mouvements de faible amplitude et approximation linéaire

Notons x_0 la position d'un équilibre stable. On s'intéresse ici au mouvement du point M lorsqu'il reste au voisinage de x_0.

On peut effectuer un développement limité à l'ordre 2 du potentiel autour de x_0 :

$$E_p(x) \underset{x\to x_0}{\simeq} E_p(x_0) + (x-x_0)\underbrace{E_p'(x_0)}_{=0 \text{ car équ.}} + \frac{(x-x_0)^2}{2}E_p''(x_0).$$



On a donc :

$$E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}E_p''(x_0),$$

$\leadsto_6$ Écrire alors l'expression de l'énergie mécanique (en fonction de $\dot{x}$ et x), et en déduire l'équation du mouvement. Quel type d'équation bien connue obtient-on ? Quelle est la forme générale des solutions ?

Posons $k = E_p''(x_0)$. L'énergie mécanique est :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}k.$$

Le mouvement étant conservatif, on a $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$, donc :

$$0 = \frac{1}{2}m\,2\ddot{x}\dot{x} + \frac{2\dot{x}(x-x_0)}{2}k.$$

D'où l'équation du mouvement :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_0.$$

Il s'agit de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique, de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

($k = E_p''(x_0) > 0$ car équilibre stable.)

Les solutions sont du type

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

Attention, ceci est pour des mouvements de petites amplitudes autour du point d'équilibre x_0.

Bilan : approximation harmonique

Le potentiel autour d'un point d'équilibre stable x_0 peut être approché par un puits de potentiel harmonique, du type

$$E_p(x) = E_p(x_0) + E_p''(x_0)(x - x_0)^2/2.$$

Le mouvement au voisinage proche d'un point d'équilibre stable peut donc être approché par celui d'un oscillateur harmonique (dont la "raideur" serait $k = E_p''(x_0)$).

On dit qu'on a effectué une *approximation linéaire*, en négligeant les termes d'ordre supérieur dans l'expression approchée du potentiel.

$\rightsquigarrow_7$ Dans le cas d'une masse accrochée à un ressort de longueur x (longueur à vide l_0, raideur k), comment s'exprime l'énergie potentielle ? Où y a-t-il une position d'équilibre ? Que vaut alors E_p'' ? En appliquant les résultats de la démonstration qui précède, quelle pulsation trouve-t-on pour les oscillations ?

$E_p = \dfrac{1}{2}k(x - l_0)^2$ qui admet un minimum en $x = l_0$: position d'équilibre stable.

On a alors $E_p''(l_0) = k$.

Ainsi, on a $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, ce qui est bien le résultat trouvé dans les chapitres précédents.

En conclusion, l'équation de l'oscillateur harmonique est importante car elle permet de modéliser bien plus que le système masse-ressort : elle s'applique en première approximation pour les mouvements de faible amplitude de tout système autour d'une position d'équilibre.

b/ Mouvements d'amplitude plus importante : effets non linéaires

Les termes négligés dans le développement du potentiel ont pour conséquence des écarts par rapport à la solution de l'oscillateur harmonique : période qui dépend de l'amplitude du mouvement, position moyenne différente de x_0, etc.

Ceci sera exploré via une approche numérique.

Mécanique
Chapitre 3

TD

VI Piégeage d'un électron

Considérons le mouvement selon un axe (Oz) d'un électron de masse $m = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg et de charge $-e = -1{,}6 \times 10^{-19}$ C dans un dispositif de piégeage. Son énergie potentielle est donnée par :

$$E_p(z) = \frac{eV_0}{2d^2} z^2,$$

où $V_0 = 5{,}0$ V et $d = 6{,}0$ mm. On néglige tout phénomène dissipatif.

1 - Tracer l'allure de $E_p(z)$. Quel est le type de mouvement possible ? Identifier la position d'équilibre et donner sa stabilité.

2 - Calculer la fréquence des oscillations de l'électron dans le piège.

VII Puits de potentiel et approximation harmonique

On considère un pendule simple : masse m ponctuelle oscillant au bout d'une tige de masse négligeable, sans frottement. Soit Oz un axe vers le bas et θ l'angle orienté entre cet axe et la tige. Nous avons démontré qu'il s'agit d'un mouvement conservatif à un degré de liberté (θ), et que l'énergie potentielle du système s'écrit :

$$E_p(\theta) = mgL(1 - \cos\theta).$$

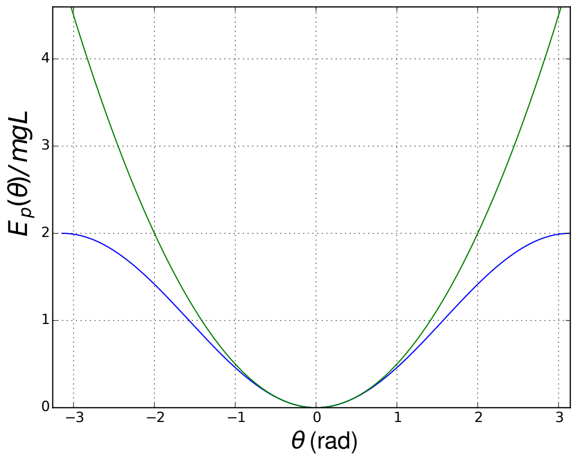
Cette énergie potentielle est tracé sur la figure ci-contre.

a/ Approximation harmonique

1 - On souhaite approcher la position d'équilibre stable en $\theta = 0$ par un puit de potentiel harmonique. Donner l'expression de l'énergie potentielle harmonique $E_{p,\text{harm}}$ qui permet de faire ceci.

On indique pour cela que $\cos\theta \underset{\theta\to 0}{=} 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$ à l'ordre 2 en θ.

2 - On effectue l'approximation des oscillations de faible amplitude. On lance le pendule d'un angle θ_0 sans vitesse initiale. Rappeler la solution $\theta(t)$ que l'on obtient. La période des oscillations dépend-elle de l'amplitude θ_0 ?

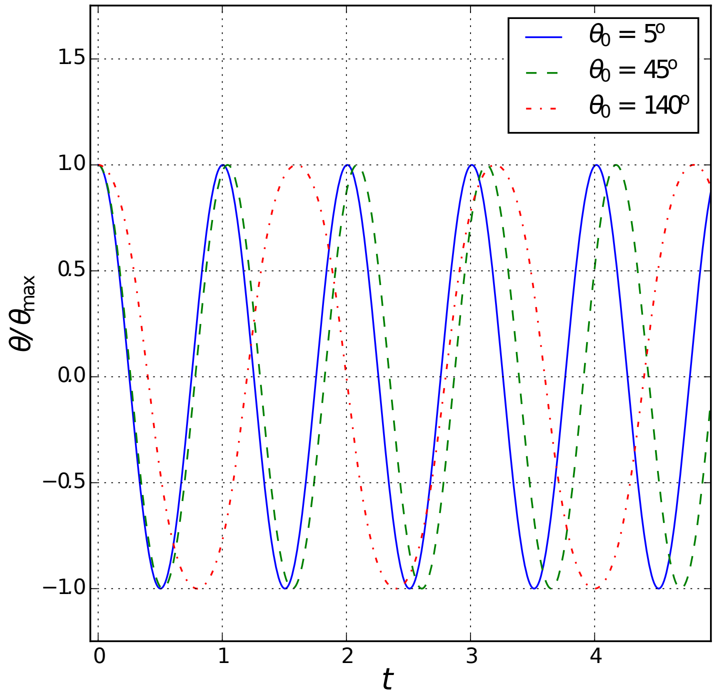


Graphe de l'énergie potentielle du système en fonction de θ, dans le cas sans approximation et dans le cas de l'approximation harmonique.

b/ Sans l'approximation harmonique

On constate sans surprise sur la figure ci-dessus que l'énergie potentielle harmonique s'éloigne de l'énergie potentielle réelle lorsque θ n'est plus petit. Les solutions de l'équation du mouvement seront donc différentes de celles attendues dans l'approximation harmonique.

Afin d'obtenir les solutions, il est nécessaire de résoudre l'équation du mouvement $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$ sans faire d'approximation pour le sinus. Il faut alors recourir à une résolution numérique, par exemple la fonction `odeint` sous Python. C'est ce qui a été fait sur la figure ci-dessous (script réalisé dans une autre activité).



Solution de l'équation du mouvement sans approximation harmonique, pour trois conditions initiales différentes. À gauche graphe de $\theta(t)/\theta_0$, à droite portrait de phase.

3 - Quelles différences remarquez-vous par rapport au cas de l'approximation harmonique ?