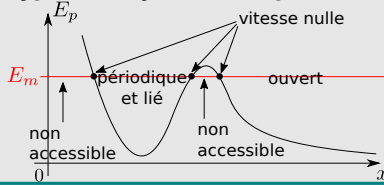


Énergie en mécanique

(mouvements conservatifs à 1D)

V Mouvement conservatif à un degré de liberté

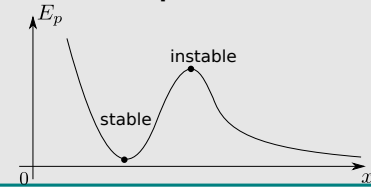
1 - Type de trajectoire et positions de vitesse nulle



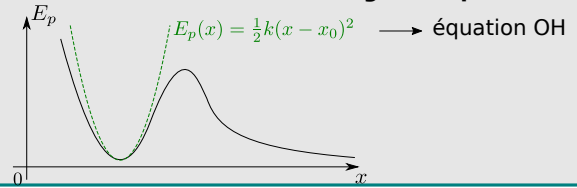
2 - Franchissement d'une barrière de potentiel

Quelle énergie fournir ?

3 - Position d'équilibre stable ou instable



4 - Petits mouvements au voisinage d'un puit



Ce qu'il faut savoir faire

(cours : V)

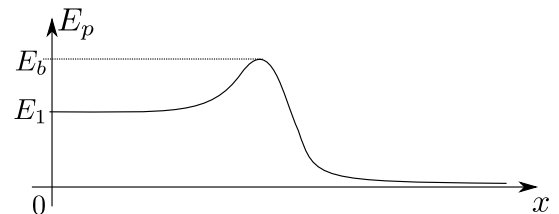
- ▶₁ Dédire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif (bornée ou non, points où $\vec{v} = \vec{0}$). → cours V.1
- ▶₂ Évaluer l'énergie minimale pour franchir une barrière de potentiel. → **EC5**
- ▶₃ Dédire d'un graphe d' E_p les positions d'équilibre (stables ou instables). → cours V.3, TD VI
- ▶₄ Étudier les petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre via une approx. harmonique. → TD VII

Exercices de cours

Exercice C5 – Franchissement d'une barrière de potentiel

On considère l'énergie potentielle ci-contre, qui peut correspondre à une bille glissant sans frottements sur un sol dont la topographie est celle du graphique : altitude h_1 en $x = 0$, franchissement d'un col d'altitude h_b , puis altitude nulle lorsque $x \rightarrow +\infty$. La bille est lancée en $x = 0$ avec une vitesse v_0 en direction des x croissants.

- 1 - Justifier que l'énergie mécanique de la bille reste constante au cours du temps.
- 2 - Montrer que la bille atteint tout juste le haut du col pour une valeur particulière de sa vitesse initiale v_0 , que l'on exprimera en fonction de m , E_1 et E_b .
- 3 - Que se passe-t-il si v_0 est inférieure à cette valeur limite ? Et supérieure ?
- 4 - Exprimer enfin v_0 en fonction de m , g , h_1 et h_b .



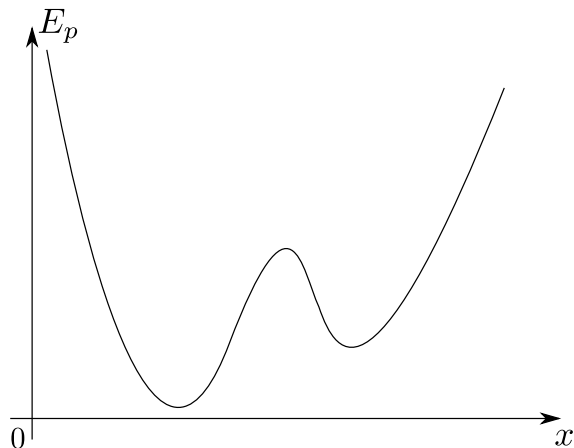
V – Mouvement conservatif à un degré de liberté

Introduction du problème et graphe d'énergie potentielle

Dans toute cette partie on considère :

- un point matériel M soumis seulement à des forces conservatives, qui dérivent d'une énergie potentielle totale E_p ;
- une situation à un degré de liberté, par exemple un mouvement selon un axe x et donc une énergie potentielle $E_p(x)$ (graphe ci-contre) ;
- on note $\vec{F} = F(x) \vec{e}_x$ la force totale s'exerçant sur M et dérivant de E_p .

On peut imaginer qu'on décrit l'évolution d'un mobile glissant sans frottement sur une surface courbe dont la hauteur $z = z(x)$ correspond à $E_p(x) = mg z(x)$. Mais la situation décrite est bien plus générale.



Nous allons voir que le graphe d'énergie potentielle permet d'obtenir beaucoup d'informations sur les mouvements possibles.

1 – Type de trajectoire et positions de vitesse nulle

L'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p(x)$ est constante au cours du mouvement (car conservatif). Sa valeur est donnée par les conditions initiales.

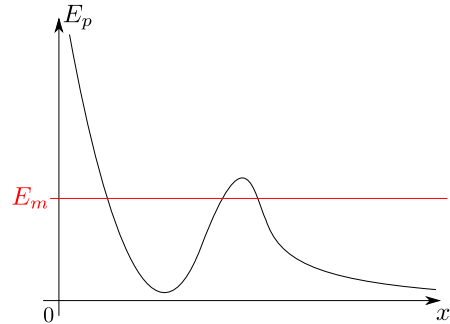
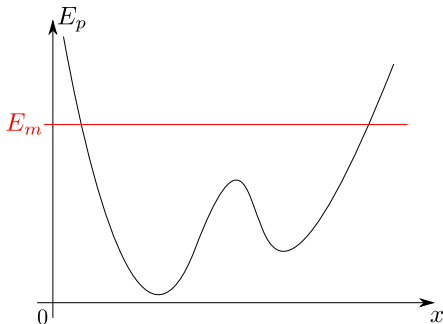
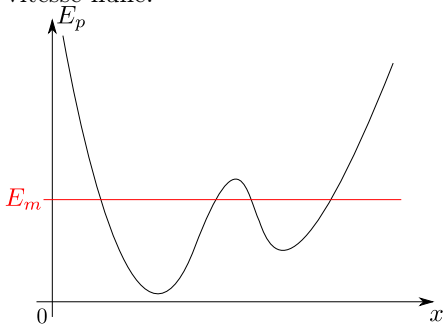
On peut la tracer sur le graphe d'énergie potentielle ci-dessus.

→₁ Montrer simplement que $\forall t, E_m \geq E_p(x)$, et que $E_m = E_p(x)$ signifie que $v = 0$ au point x .

Méthode : analyse d'un graphe d'énergie potentielle (1)

- ▶ Les conditions initiales déterminent la valeur (constante) de E_m , que l'on trace sur le graphe de $E_p(x)$.
- ▶ Les mouvements possibles vérifient $E_p(x) \leq E_m$: ceci permet de savoir si le mouvement est périodique ou non, si la trajectoire est bornée ou non.
- ▶ Les points d'intersection de E_m et de $E_p(x)$ sont des points de vitesse nulle.

→₂ Compléter les schémas ci-dessous en indiquant le type de mouvement possible dans chaque zone, et les points de vitesse nulle.



2 – Franchissement d'une barrière de potentiel

On appelle barrière de potentiel une zone de l'espace où le potentiel $E_p(x)$ admet un maximum local. Il est alors intéressant de se demander sous quelle condition un mobile peut franchir cette barrière.

→₃ Faire l'exemple décrit dans l'EC5.

3 – Positions d'équilibre stables ou instables

Rappel du III.3 : la force est donnée par $\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\vec{e}_x$.

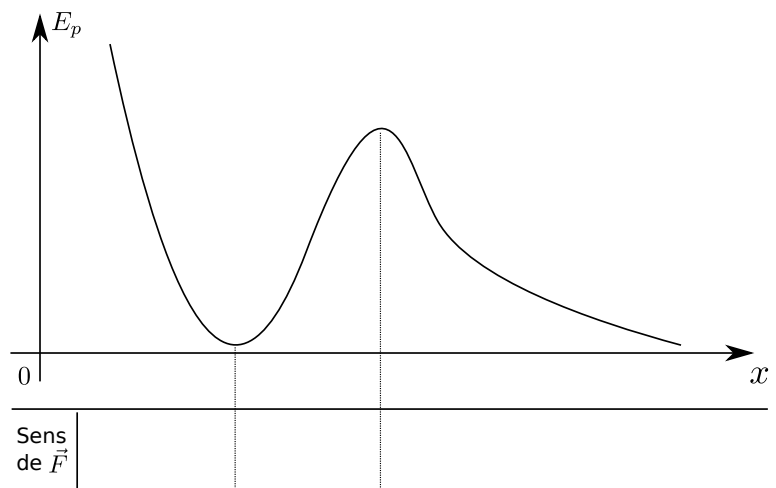
→₄ D'après ce résultat, que vaut la force en un point où $\frac{dE_p}{dx} = 0$? Comment peut-on appeler un tel point x ?

Les positions d'équilibre peuvent être de deux types :

- Elle est stable lorsqu'un petit mouvement du point M entraîne un retour vers la position d'équilibre.
- Elle est instable lorsqu'un petit mouvement du point M entraîne un éloignement de la position d'équilibre.

Exemples : une bille au fond d'un bol (équilibre stable), un stylo posé sur sa pointe (équilibre instable).

→₅ Sur le graphe ci-contre, faire apparaître le sens de la force \vec{F} (vers la gauche ou vers la droite ?) autour de chaque position d'équilibre, et en déduire la stabilité de ces positions. Conclure sur un critère de stabilité à partir du graphe de $E_p(x)$.



Méthode : analyse d'un graphe d'énergie potentielle (2)

- ▶ Les positions x où $\frac{dE_p}{dx}(x) = 0$ sont des positions d'équilibre.
- ▶ La stabilité de l'équilibre est donnée par le signe de $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x)$:
 - stable si $\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$ (graphe du type $f(x) = x^2$ pour lequel $f'' = 2 > 0$) ;
 - instable si $\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$ (graphe du type $f(x) = -x^2$).

4 – Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable

Notion mathématique : développement limité

Soit f une fonction (suffisamment dérivable) et x_0 un point.

On peut approcher les valeurs de f autour du point x_0 à l'aide d'un développement limité :

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{(x - x_0)f'(x_0)}_{\text{terme d'ordre 1}} + \underbrace{\frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0)}_{\text{terme d'ordre 2}} + \underbrace{\frac{(x - x_0)^3}{3!}f^{(3)}(x_0)}_{\text{terme d'ordre 3}} + \underbrace{o((x - x_0)^3)}_{\text{termes négligeables devant les autres}}$$

Nous l'avons écrit à l'ordre 3 ci-dessus, mais il peut être mené à n'importe quel ordre.

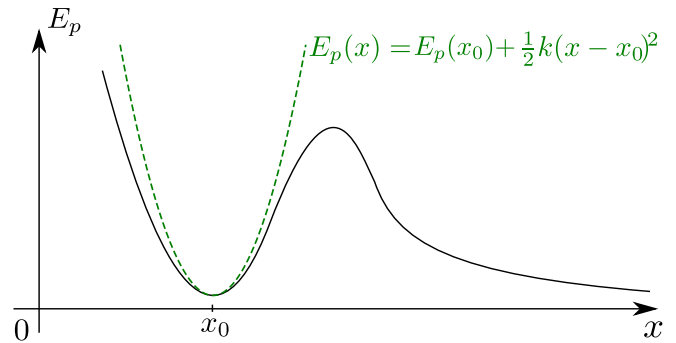
L'écriture de chaque terme permet d'être de plus en plus précis dans la description de f autour de x_0 .

a/ Mouvements de faible amplitude et approximation linéaire

Notons x_0 la position d'un équilibre stable. On s'intéresse ici au mouvement du point M lorsqu'il reste au voisinage de x_0 .

On peut effectuer un développement limité à l'ordre 2 du potentiel autour de x_0 :

$$E_p(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\simeq} E_p(x_0) + (x - x_0) \underbrace{E_p'(x_0)}_{=0 \text{ car éq.}} + \frac{(x - x_0)^2}{2} E_p''(x_0).$$



On a donc :

$$E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} E_p''(x_0),$$

→₆ Écrire alors l'expression de l'énergie mécanique (en fonction de \dot{x} et x), et en déduire l'équation du mouvement. Quel type d'équation bien connue obtient-on ? Quelle est la forme générale des solutions ?

Attention, ceci est pour des mouvements de petites amplitudes autour du point d'équilibre x_0 .

Bilan : approximation harmonique

Le potentiel autour d'un point d'équilibre stable x_0 peut être approché par un puits de potentiel harmonique, du type

$$E_p(x) = E_p(x_0) + E_p''(x_0)(x - x_0)^2/2.$$

Le mouvement au voisinage proche d'un point d'équilibre stable peut donc être approché par celui d'un oscillateur harmonique (dont la "raideur" serait $k = E_p''(x_0)$).

On dit qu'on a effectué une *approximation linéaire*, en négligeant les termes d'ordre supérieur dans l'expression approchée du potentiel.

→ Dans le cas d'une masse accrochée à un ressort de longueur x (longueur à vide l_0 , raideur k), comment s'exprime l'énergie potentielle? Où y a-t-il une position d'équilibre? Que vaut alors E_p'' ? En appliquant les résultats de la démonstration qui précède, quelle pulsation trouve-t-on pour les oscillations?

En conclusion, l'équation de l'oscillateur harmonique est importante car elle permet de modéliser bien plus que le système masse-ressort : elle s'applique en première approximation pour les mouvements de faible amplitude de tout système autour d'une position d'équilibre.

b/ Mouvements d'amplitude plus importante : effets non linéaires

Les termes négligés dans le développement du potentiel ont pour conséquence des écarts par rapport à la solution de l'oscillateur harmonique : période qui dépend de l'amplitude du mouvement, position moyenne différente de x_0 , etc.

Ceci sera exploré via une approche numérique.

Mécanique
Chapitre 3

TD

VI Piégeage d'un électron

Considérons le mouvement selon un axe (Oz) d'un électron de masse $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg et de charge $-e = -1,6 \times 10^{-19}$ C dans un dispositif de piégeage. Son énergie potentielle est donnée par :

$$E_p(z) = \frac{eV_0}{2d^2} z^2,$$

où $V_0 = 5,0$ V et $d = 6,0$ mm. On néglige tout phénomène dissipatif.

- 1 - Tracer l'allure de $E_p(z)$. Quel est le type de mouvement possible? Identifier la position d'équilibre et donner sa stabilité.
- 2 - Calculer la fréquence des oscillations de l'électron dans le piège.

VII Puits de potentiel et approximation harmonique

On considère un pendule simple : masse m ponctuelle oscillant au bout d'une tige de masse négligeable, sans frottement. Soit Oz un axe vers le bas et θ l'angle orienté entre cet axe et la tige. Nous avons démontré qu'il s'agit d'un mouvement conservatif à un degré de liberté (θ), et que l'énergie potentielle du système s'écrit :

$$E_p(\theta) = mgL(1 - \cos \theta).$$

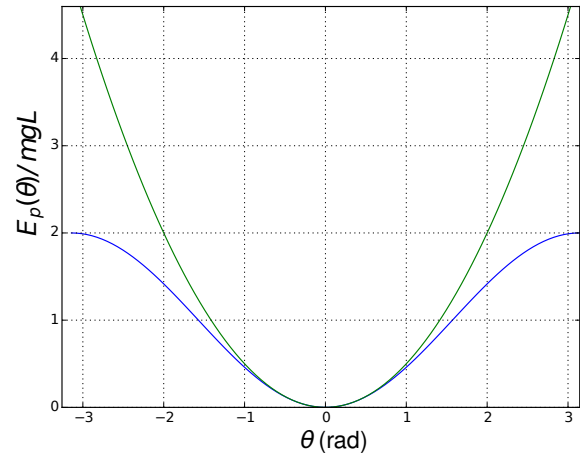
Cette énergie potentielle est tracé sur la figure ci-contre.

a/ Approximation harmonique

- 1 - On souhaite approcher la position d'équilibre stable en $\theta = 0$ par un puit de potentiel harmonique. Donner l'expression de l'énergie potentielle harmonique $E_{p,\text{harm}}$ qui permet de faire ceci.

On indique pour cela que $\cos \theta \underset{\theta \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{\theta^2}{2}$ à l'ordre 2 en θ .

- 2 - On effectue l'approximation des oscillations de faible amplitude. On lance le pendule d'un angle θ_0 sans vitesse initiale. Rappeler la solution $\theta(t)$ que l'on obtient. La période des oscillations dépend-elle de l'amplitude θ_0 ?

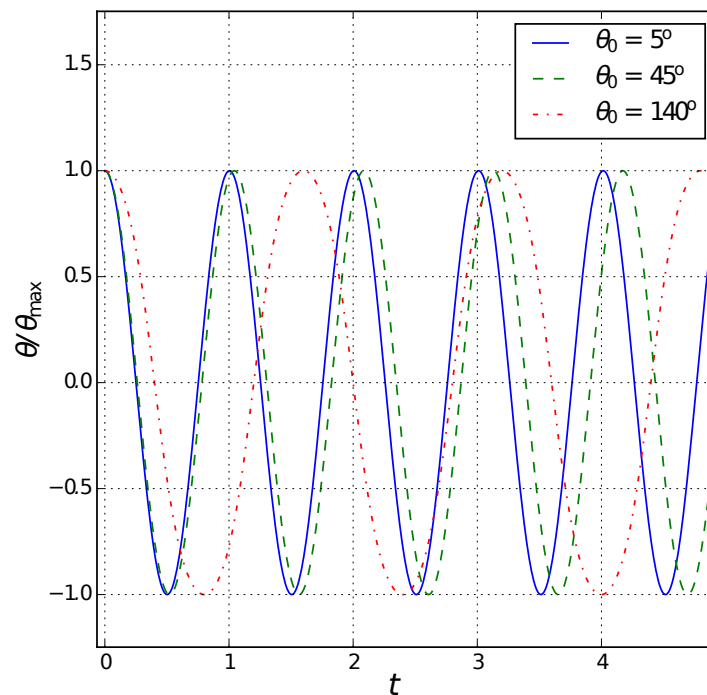


Graphe de l'énergie potentielle du système en fonction de θ , dans le cas sans approximation et dans le cas de l'approximation harmonique.

b/ Sans l'approximation harmonique

On constate sans surprise sur la figure ci-dessus que l'énergie potentielle harmonique s'éloigne de l'énergie potentielle réelle lorsque θ n'est plus petit. Les solutions de l'équation du mouvement seront donc différentes de celles attendues dans l'approximation harmonique.

Afin d'obtenir les solutions, il est nécessaire de résoudre l'équation du mouvement $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$ sans faire d'approximation pour le sinus. Il faut alors recourir à une résolution numérique, par exemple la fonction `odeint` sous Python. C'est ce qui a été fait sur la figure ci-dessous (script réalisé dans une autre activité).



Solution de l'équation du mouvement sans approximation harmonique, pour trois conditions initiales différentes. À gauche graphe de $\theta(t)/\theta_0$, à droite portrait de phase.

- 3 - Quelles différences remarquez-vous par rapport au cas de l'approximation harmonique ?