Partie VI : Mécanique
Chapitre 3

Correction – TD – Énergie en mécanique

I Exemples rapides

1 - Prenons un axe z vers le haut, avec $z = 0$ au départ. L'énergie mécanique est $E_m = \dfrac{1}{2}mv^2 + mgz$, conservée car toutes les forces (le poids ici) sont conservatives.

Initialement $E_m = \dfrac{1}{2}mv_0^2$, et pour l'altitude maximale on a $v = 0$ et $z = z_{\max}$, d'où $E_m = mgz_{\max}$.

Par conservation de l'énergie mécanique on a donc $\dfrac{1}{2}mv_0^2 = mgz_{\max}$, d'où

$$z_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

2 - L'énergie mécanique est $E_m = \dfrac{1}{2}m(lth\dot{e}ta)^2 - mgl\cos\theta$, conservée car toutes les forces qui travaillent sont conservatives (le poids l'est, la tension du fil ne travaille pas).

Initialement $\theta_0 = 0$ et $v = v_0$, et donc $E_m = \dfrac{1}{2}mv_0^2 - mgl$. Au moment d'amplitude maximale, $\theta = \theta_m$ et $v = 0$, donc $E_m = -mgl\cos\theta_m$.

Par conservation de l'énergie mécanique on a donc $\dfrac{1}{2}mv_0^2 - mgl = -mgl\cos\theta_m$, d'où

$$\cos\theta_m = 1 - \frac{v_0^2}{2gl}.$$

3 - Soit $E = 500\,\mathrm{Wh} = 500 \times 3600\,\mathrm{J} = 1{,}8 \times 10^6\,\mathrm{J}$.

On a au maximum (en négligeant tout frottement et autres pertes) : $mgz = E$, d'où $z = \dfrac{E}{mg} = 1800\,\mathrm{m}$.

II Système masse-ressort vertical avec le TEM

III Piégeage d'un électron

Considérons le mouvement selon un axe (Oz) d'un électron de masse $m = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ et de charge $-e = -1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ dans un dispositif de piégeage. Son énergie potentielle est donnée par :

$$E_p(z) = \frac{eV_0}{2d^2}z^2,$$

où $V_0 = 5{,}0\,\mathrm{V}$ et $d = 6{,}0\,\mathrm{mm}$. On néglige tout phénomène dissipatif.

1 - Il s'agit d'une parabole orientée vers le haut. Cela forme un puits de potentiel, le type de mouvement possible est donc périodique et borné.

La position d'équilibre est à l'endroit où $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = 0$, or $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = \dfrac{eV_0}{d^2}z$, donc la position d'équilibre est en $z = 0$.

Sa stabilité est donnée par le signe de $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}z^2} = \dfrac{eV_0}{d^2} > 0$, donc elle est stable.

(On pouvait aussi raisonner sans calcul, uniquement avec le graphique.)

2 - $E_m = \dfrac{1}{2}m\dot{z}^2 + \dfrac{eV_0}{2d^2}z^2$ est une constante car le mouvement est conservatif.

On dérive par rapport au temps, pour obtenir après simplification que $\dfrac{1}{2}m\,2\dot{z}\ddot{z} + \dfrac{eV_0}{2d^2}2\dot{z}\,z = 0$, soit donc

$$\ddot{z} + \frac{eV_0}{md^2}z = 0.$$

On reconnaît l'équation de l'oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{eV_0}{md^2}}$, et donc de fréquence $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{eV_0}{md^2}}$.

IV Chute sur corde en escalade

1 - Bilan entre les instants 1 et 2 de la figure : $mgh = \dfrac{1}{2}mv^2$, d'où $\boxed{v = \sqrt{2gh} = 1.0 \times 10\,\mathrm{m/s}.}$

2 - Bilan entre les instants 1 et 3 : $mgh = \dfrac{1}{2}k\Delta l^2 + mg(-\Delta l)$. En négligeant le dernier terme car $\Delta l \ll h$, on obtient $\boxed{\Delta l = \sqrt{\dfrac{2mgh}{k}}.}$

3 - La force est, en norme : $F_{\max} = k\Delta l = \sqrt{2mgh\,k} = \sqrt{2mgh\,\dfrac{\alpha}{L_0}} = \sqrt{2mg\alpha\,f}$.

On a $\boxed{F_{\max} = \sqrt{2 \times 100 \times 10 \times 5 \times 10^4 \times 1} = 10\,\mathrm{kN},}$ ce qui est inférieure à la limite de $12\,\mathrm{kN}$.

4 - $f = 1/0.5 = 2$ dans le premier cas, $f = 4/8 = 0.5$ dans le second. Le premier cas est donc plus dangereux car $F_{\max}$ est en $\sqrt{f}$, donc deux fois plus importante dans le cas 1.

V Record de saut à la perche

Il faut faire un bilan d'énergie mécanique entre l'instant A "course d'élan" et l'instant C "sommet du saut".
Il y a deux énergies potentielles : celle de pesanteur, $E_{p,\text{pes}} = mgz$ avec z un axe vers le haut, et $E_{p,\text{élast}}$ l'énergie potentielle élastique de la perche, qui est nulle dans les étapes A et C car la perche n'est pas contractée ou pliée.
On a ainsi $E_{m,A} = E_{c,\max} = \dfrac{1}{2}mv_{\max}^2$ avec $v_{\max}$ la vitesse de course de l'athlète.
Et $E_{m,C} = mgh$ avec h la hauteur du saut (pas d'énergie cinétique car sauteur au sommet de la trajectoire).
On néglige tout frottement, le mouvement est donc conservatif et on a $E_{m,C} = E_{m,A}$, d'où $\dfrac{1}{2}mv_{\max}^2 = mgh$, d'où

$$h = \frac{v_{\max}^2}{2g} = 5{,}1\,\mathrm{m}.$$

On trouve ainsi une hauteur légèrement inférieure à la hauteur du record de Renaud Lavillenie. La raison est que notre raisonnement s'applique pour un point matériel, ou en fait pour le centre de masse du sauteur. Or le centre de masse est déjà situé à une certaine hauteur par rapport au niveau du sol, d'où un résultat légèrement plus élevé.

Enfin, notre raisonnement montre que la hauteur maximale ne dépend de la perche utilisée, et en particulier pas de sa hauteur. La perche sert "seulement" à convertir l'énergie cinétique du sauteur en mouvement ascendant, puis donc en énergie potentielle de pesanteur.

VI Puit de potentiel et approximation harmonique

VII Skieur

1 - Le mouvement n'est pas conservatif car la force de frottement ne l'est pas.

2 - Système {skieur}, bilan des forces :

- Poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- Réaction normale $\vec{N} = N\vec{e}_{z'}$ avec $N \geq 0$.
- Réaction tangentielle $\vec{T} = -T\vec{e}_{x'}$ avec $T \geq 0$ et $T = fN$.

PFD au même système (on suppose le référentiel galiléen) :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}.$$

Or ici $\vec{a} = \ddot{x}'\vec{e}_{x'}$, d'où l'intérêt d'utiliser la base $\vec{e}_{x'}$, $\vec{e}_{z'}$ et de projeter sur $\vec{e}_{z'}$:

$$m\vec{a}\cdot\vec{e}_{z'} = \vec{P}\cdot\vec{e}_{z'} + \vec{N}\cdot\vec{e}_{z'} + \vec{T}\cdot\vec{e}_{z'},$$

$$0 = -mg\cos\alpha + N + 0,$$

d'où $N = mg\cos\alpha$, puis via la loi de Coulomb :

$$\boxed{T = fN = fmg\cos\alpha, \quad \text{et} \quad \vec{T} = fN = fmg\cos\alpha\,\vec{e}_x'.}$$

3 - On applique le théorème de l'énergie mécanique entre A et B, en prenant garde à considérer les forces de frottement non conservatives :

$$E_{m,B} - E_{m,A} = W_{AB}(\vec{T})$$

(la composante $\vec{N}$ ne travaille pas).

Calculons :

$$W_{AB}(\vec{T}) = \int_A^B \vec{T}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_A^B -T\vec{e}_{x'}\cdot\mathrm{d}x'\vec{e}_{x'} = -T\int_A^B \mathrm{d}x' = -T\times AB.$$

Or $T = fmg\cos\alpha$, $AB = H/\sin\alpha$, donc

$$W_{AB}(\vec{T}) = -\frac{fmgH\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{fmgH}{\tan\alpha}.$$

Enfin, $E_{m,B} = \dfrac{1}{2}mv_B^2$ et $E_{m,A} = mgH$, d'où

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_B^2 = mgH - mgH\,\frac{f}{\tan\alpha} = mgH\left(1 - \frac{f}{\tan\alpha}\right).}$$

On a $\dfrac{f}{\tan\alpha} = 26\%$, ce qui donne la part d'énergie mécanique perdue par frottements.

On peut ensuite faire l'AN pour v_B.

4 - L'altitude maximale qu'il peut atteindre est donnée par la conservation de l'énergie mécanique, entre B et un point C d'altitude z_C et de vitesse nulle. On a alors $mgz_C = E_{m,B}$.

Si la vitesse en C est nulle, c'est que la trajectoire est exactement verticale. Cela posera des problèmes à la réception !