Partie VI : Mécanique
Chapitre 3

TD – Énergie en mécanique

Remarque : exercice avec $\star$: exercice particulièrement important, à maîtriser en priorité (de même que les exercices de cours) | [● ○ ○] : difficulté des exercices

I Exemples rapides $\star$ | [● ○ ○]

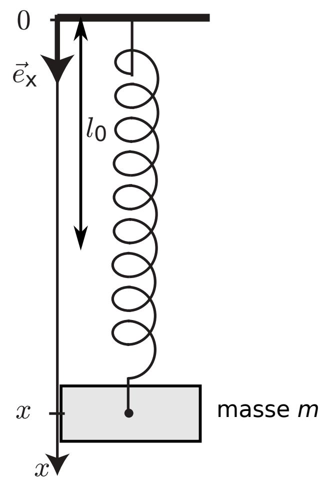
1 - On lance une balle avec une vitesse initiale V_0 vers le haut depuis l'altitude $z = 0$. Déterminer la hauteur maximale atteinte par la balle en négligeant tout frottement.

2 - On considère un pendule simple (masse m ponctuelle, longueur l, pas de frottements). On fait partir ce pendule d'un angle $\theta = 0$ en lui communiquant une vitesse initiale v_0. Déterminer l'expression de l'amplitude maximale θ_m du mouvement.

3 - Une batterie de vélo annonce une capacité de 500 Wh.On considère un ensemble cycliste + équipement de masse 100 kg. De quelle altitude maximale ceci permet-il de s'élever sans effort de la part du cycliste ?

II Système masse-ressort vertical avec le TEM $\star$ | [● ○ ○]

On considère une masse m attachée à un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. Le tout est vertical. On négligera tout frottement.
On prendra $k = 40\,\mathrm{N/m}$, $m = 100\,\mathrm{g}$, $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.



1 - Donner l'expression de l'énergie mécanique totale du système, en fonction notamment de $x(t)$ et $\dot{x}$.

L'utiliser afin de trouver l'équation du mouvement.

2 - Utiliser l'expression de l'énergie potentielle pour trouver l'expression de la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$.

3 - Résoudre l'équation obtenue question 2. On considérera qu'à l'instant initial la masse est en $x = x_{\text{éq}} + \delta$, et on lâche la masse de cette position sans vitesse initiale.

III Piégeage d'un électron [● ○ ○]

Considérons le mouvement selon un axe (Oz) d'un électron de masse $m = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ et de charge $-e = -1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ dans un dispositif de piégeage. Son énergie potentielle est donnée par :

$$E_p(z) = \frac{eV_0}{2d^2} z^2,$$

où $V_0 = 5{,}0\,\mathrm{V}$ et $d = 6{,}0\,\mathrm{mm}$. On néglige tout phénomène dissipatif.

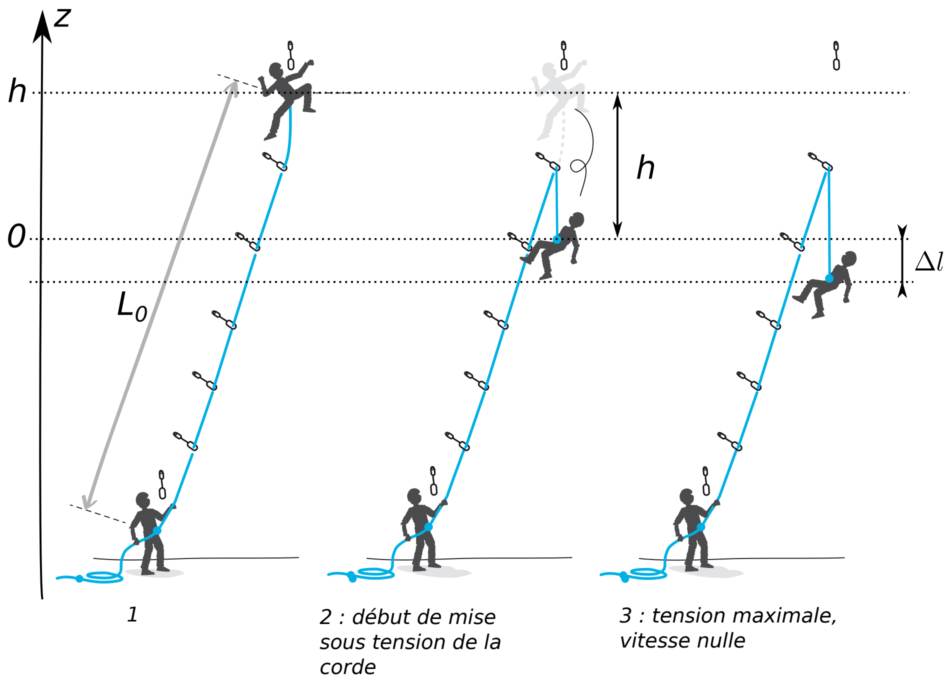
1 - Tracer l'allure de $E_p(z)$. Quel est le type de mouvement possible ? Identifier la position d'équilibre et donner sa stabilité.

2 - Calculer la fréquence des oscillations de l'électron dans le piège.

IV Chute sur corde en escalade [• ◦ ◦]

On étudie un grimpeur qui effectue une chute. Une corde d'escalade de longueur L_0 peut en première approximation être modélisée par un ressort de longueur à vide L_0 et de raideur $k = \dfrac{\alpha}{L_0}$, avec α une caractéristique de la corde.

Le grimpeur est en chute libre sur une hauteur h pendant laquelle la corde n'est pas sous tension. Puis la corde passe sous tension, et la chute se poursuit sur une hauteur Δl. La vitesse du grimpeur devient ainsi nulle au bout d'une hauteur totale de chute $h + \Delta l$.



(source : site Petzl)

On prendra $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, une corde avec $\alpha = 5.0 \times 10^4\,\mathrm{N}$ et un grimpeur de masse 100 kg.

1 - À l'aide d'un bilan énergétique, donner l'expression de la vitesse maximale atteinte par le grimpeur. Faire l'application numérique pour une hauteur de chute $h = 5\,\mathrm{m}$.

2 - Toujours à l'aide d'une méthode énergétique, donner l'expression de l'allongement maximal Δl de la corde. On supposera que $\Delta l \ll h$ afin de simplifier le calcul.

3 - Donner enfin l'expression de la force maximale $F_{\max}$ qui s'exerce sur le grimpeur. On introduira le facteur de chute $f = h/L_0$.

Au delà d'une force de 12 kN, les dommages sur le corps humain deviennent importants. Que vaut $F_{\max}$ pour une chute de $h = 4\,\mathrm{m}$ sur une corde de longueur $L_0 = 4\,\mathrm{m}$? Conclusion ?

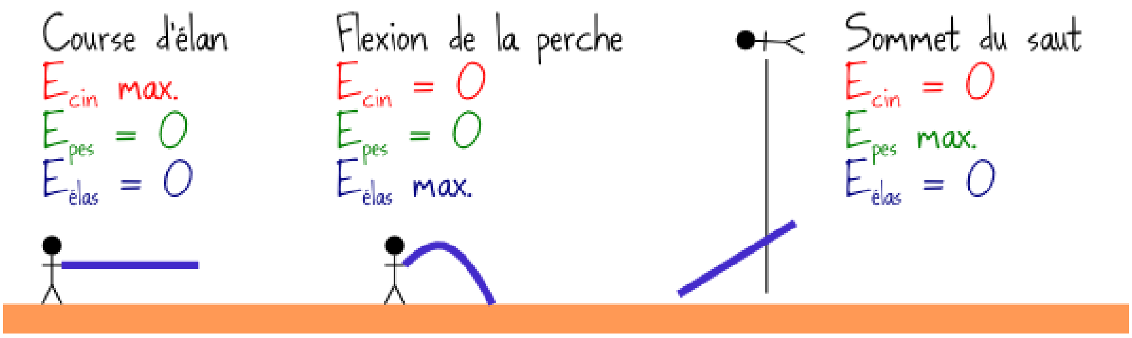
4 - Une chute d'un mètre arrêtée par une corde de 50 cm est-elle plus ou moins dangereuse qu'une chute de 4 m arrêtée par une corde de 8 m ?

V Record de saut à la perche [• • ◦]

Résolution de problème

Le record du monde de saut à la perche est détenu par le français Renaud Lavillenie, qui a franchi en 2014 une hauteur de 6,16 m.

Le schéma suivant, extrait du site sciencetonnante.wordpress.com, permet de comprendre les bilans d'énergie en jeu lors d'un tel saut. On indique que la vitesse maximale en sprint d'un coureur est de l'ordre de 10 m/s (100 m en 10 s).



1 - À l'aide de considérations énergétiques, estimer la hauteur maximale que peut atteindre un sauteur à la perche.

En particulier, cette hauteur maximale dépend-elle de la hauteur de la perche ? Quel est le rôle de la perche d'un point de vue énergétique ?

VI Puits de potentiel et approximation harmonique [• ○ ○]

On considère un pendule simple : masse m ponctuelle oscillant au bout d'une tige de masse négligeable, sans frottement. Soit Oz un axe vers le bas et θ l'angle orienté entre cet axe et la tige. Nous avons démontré qu'il s'agit d'un mouvement conservatif à un degré de liberté (θ), et que l'énergie potentielle du système s'écrit :

$$E_p(\theta) = mgL(1 - \cos\theta).$$

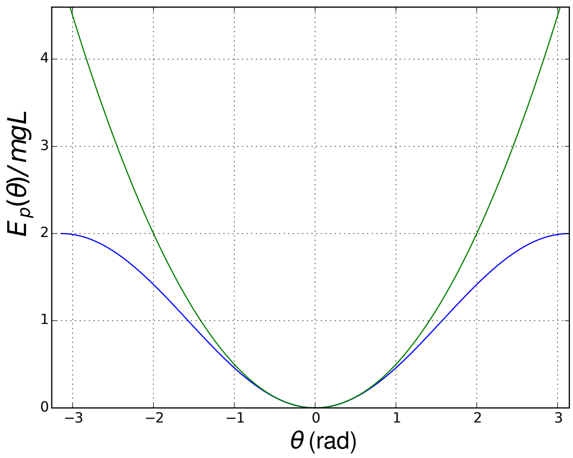
Cette énergie potentielle est tracé sur la figure ci-contre.

a/ Approximation harmonique

1 - On souhaite approcher la position d'équilibre stable en $\theta = 0$ par un puit de potentiel harmonique. Donner l'expression de l'énergie potentielle harmonique $E_{p,\text{harm}}$ qui permet de faire ceci.

On indique pour cela que $\cos\theta \underset{\theta\to 0}{=} 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$ à l'ordre 2 en θ.

2 - On effectue l'approximation des oscillations de faible amplitude. On lance le pendule d'un angle θ_0 sans vitesse initiale. Rappeler la solution $\theta(t)$ que l'on obtient. La période des oscillations dépend-elle de l'amplitude θ_0 ?

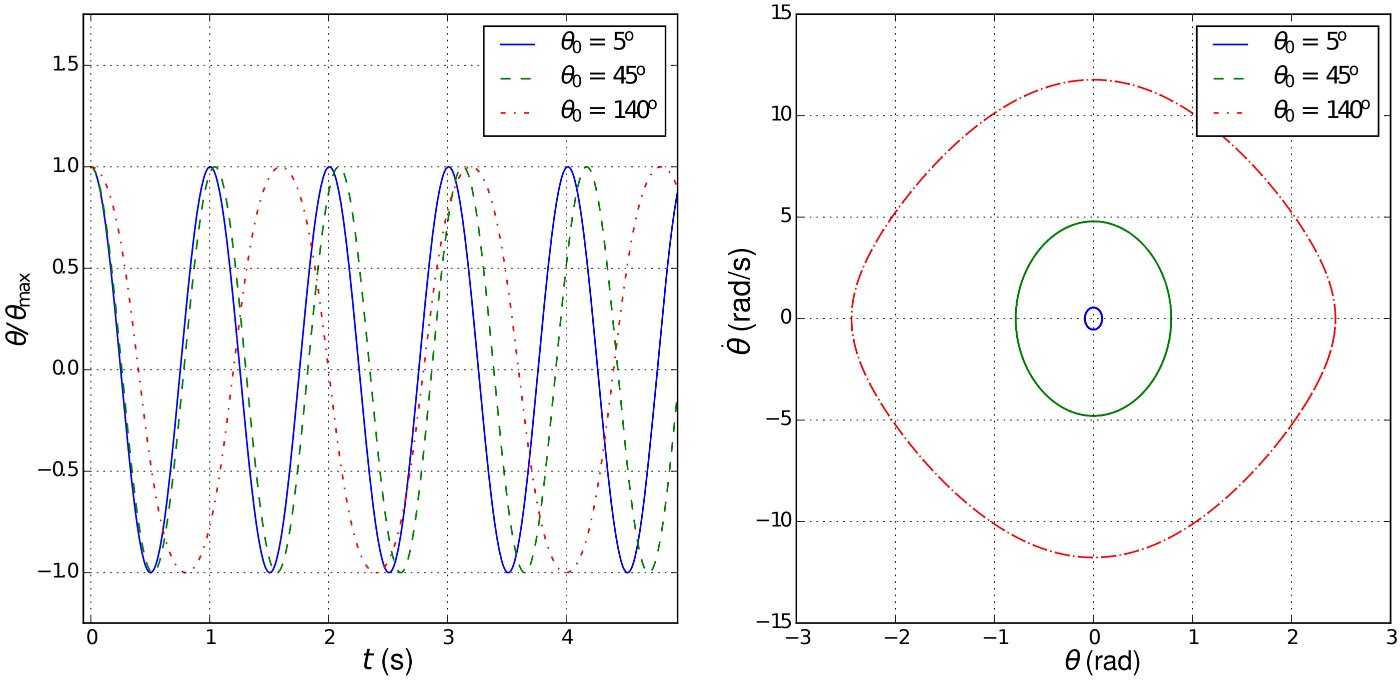


Graphe de l'énergie potentielle du système en fonction de θ, dans le cas sans approximation et dans le cas de l'approximation harmonique.

b/ Sans l'approximation harmonique

On constate sans surprise sur la figure ci-dessus que l'énergie potentielle harmonique s'éloigne de l'énergie potentielle réelle lorsque θ n'est plus petit. Les solutions de l'équation du mouvement seront donc différentes de celles attendues dans l'approximation harmonique.

Afin d'obtenir les solutions, il est nécessaire de résoudre l'équation du mouvement $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$ sans faire d'approximation pour le sinus. Il faut alors recourir à une résolution numérique, par exemple la fonction `odeint` sous Python. C'est ce qui a été fait sur la figure ci-dessous (script disponible sur le site de la classe).



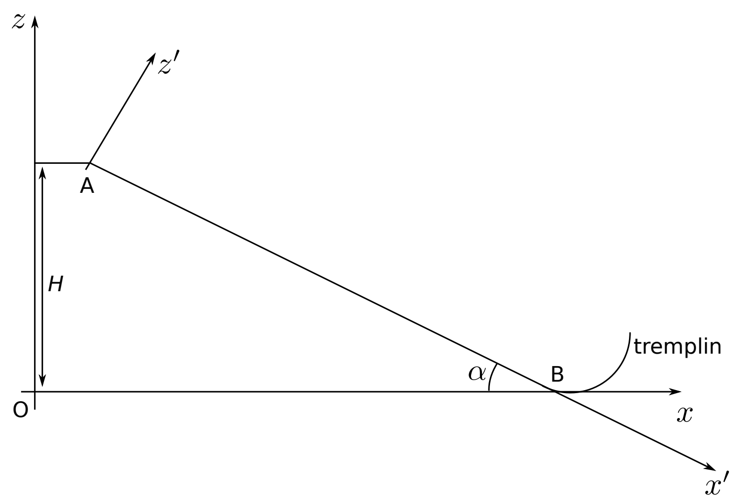
Solution de l'équation du mouvement sans approximation harmonique, pour trois conditions initiales différentes. À gauche graphe de $\theta(t)/\theta_0$, à droite portrait de phase.

3 - Quelles différences remarquez-vous par rapport au cas de l'approximation harmonique ?

VII Skieur [● ● ○]

On considère un skieur qui se lance, sans vitesse initiale au point A, dans une piste d'inclinaison moyenne $\alpha = 30°$ pour un dénivelé total de $H = 10\,\text{m}$. La masse du skieur et de ses équipements est de $100\,\text{kg}$.

On modélise les frottements entre la neige et les skis par la loi de Coulomb pour les frottements : la résultante des actions de la neige sur le skieur s'écrit $\vec{N}+\vec{T}$, avec $\vec{N}$ la composante normale à la piste et $\vec{T}$ la composante tangentielle (correspondant à des frottements), avec $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$ et $f = 0{,}15$ le coefficient de frottement ski-neige.



1 - Le mouvement est-il conservatif ?

2 - Montrer que $\vec{T} = -fmg\cos\alpha\,\vec{e}_x$.

3 - En appliquant un théorème énergétique, donner l'expression de l'énergie cinétique du skieur lorsqu'il arrive au bas de la pente (point B). En déduire la valeur de sa vitesse en B.

4 - Le skieur arrive ensuite sur un tremplin et décolle. On néglige les frottements de l'air. Quelle est l'altitude maximale qu'il va pouvoir atteindre ? Dans le cas de l'altitude maximale, tracer sa trajectoire.