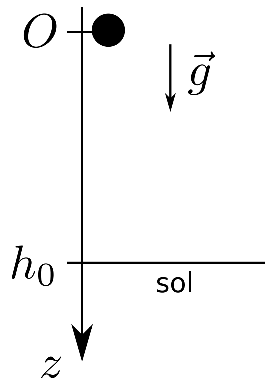
# Correction – DM 14 – Balle rebondissante

**1 -** ⋆ On considère la balle en chute libre, entre l'instant de son lâcher et celui de l'impact au sol. On choisit un repère cartésien, avec un axe $z$ dirigé vers le bas et tel que $z = 0$ initialement.




⋆ Bilan des forces sur le système {balle} :
le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z$.

⋆ L'accélération de la balle s'écrit $\vec{a} = \ddot{z}\vec{e}_z$.

⋆ Principe fondamental de la dynamique sur la balle (dans le référentiel terrestre galiléen) : $m\vec{a} = \vec{P}$, d'où $m\ddot{z}\vec{e}_z = mg\vec{e}_z$, d'où

$$\ddot{z} = g.$$

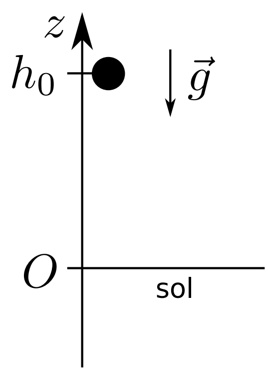
On intègre : $\dot{z} = gt + A$ avec $A = 0$ car la vitesse initiale est nulle.

On intègre encore : $z(t) = \dfrac{1}{2}gt^2 + B$ avec $B = 0$ car initialement $z = 0$, donc $\boxed{z = \dfrac{1}{2}gt^2.}$

On inverse : on a $t = \sqrt{2z/g}$.

⋆ Au moment de l'arrivée au sol on a $z = h_0$ et donc $\boxed{t_0 = \sqrt{2h_0/g}.}$

**Remarque : Même chose, mais avec un autre choix d'axe :**




Ici $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$.
Le PFD donne donc

$$\ddot{z} = -g.$$

⋆ On intègre : $\dot{z} = -gt + A$ avec $A = 0$ car la vitesse initiale est nulle.
On intègre encore : $z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + B$ avec $Bh_00$ car initialement $z = h_0$, donc $\boxed{z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + h_0.}$

⋆ Au moment de l'arrivée au sol on a $z(t_0) = 0$ et donc $0 = z(t_0) = -\dfrac{1}{2}gt_0^2 + h_0$. On isole $t_0$ : $\boxed{t_0 = \sqrt{2h_0/g}.}$

**2 -** $\star$ On raisonne entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = t_0$ (avant impact, à gauche sur la figure) : le mouvement est alors conservatif car on a négligé les frottements de l'air.

Prenons cette fois un axe $z$ vers le haut, avec $z = 0$ au sol.

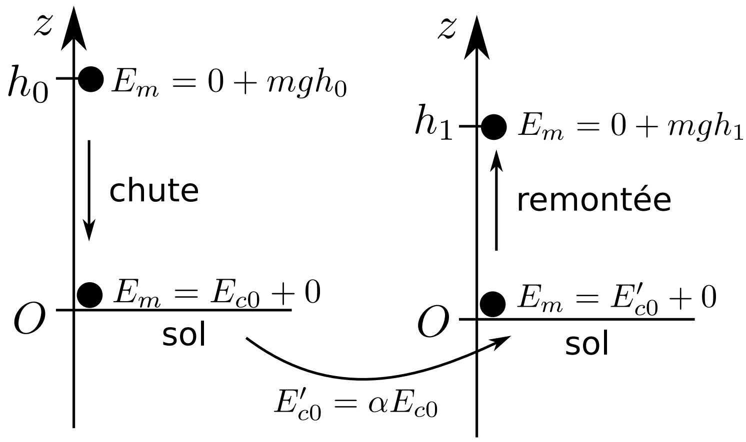
L'énergie mécanique de la balle est $E_m = E_c + mgz$. Elle est conservée car le mouvement est conservatif.

On a donc $E_m(t = 0) = E_m(t_0)$.

– Or à $t = 0$ l'énergie cinétique est nulle et l'altitude est $h_0$, donc $E_m(0) = mgh_0$ ;

– et à $t = t_0$ l'énergie cinétique est $E_{c0}$ et l'altitude est nulle, donc $E_m(t_0) = E_{c0}$.

On a donc $\boxed{E_{c0} = mgh_0.}$




$\star$ Juste après ce premier impact, on a $E'_{c0} = \alpha E_{c0} = \alpha mgh_0$.

$\star$ On applique à nouveau le théorème de l'énergie mécanique entre l'instant juste après l'impact et l'instant où l'altitude est à nouveau maximale (à droite sur la figure) : on a cette fois

– juste après l'impact, $E_m = E'_{c0}$ ;

– lorsque l'altitude est maximale, $E_m = mgh_1$.

On a donc $mgh_1 = E'_{c0}$.

$\star$ Enfin en utilisant tout ceci, on a donc $mgh_1 = E'_{c0} = \alpha E_{c0} = \alpha mgh_0$, d'où finalement $\boxed{h_1 = \alpha h_0.}$

**3 -** Nous venons de montrer que la hauteur atteinte après un impact est égale à $\alpha$ fois la hauteur maximale précédente.

On a donc par exemple $h_2 = \alpha h_1 = \alpha^2 h_0$, et de manière générale $\boxed{h_n = \alpha^n h_0.}$

**4 -** Le temps d'un aller-retour est donné par deux fois le temps mis pour chuter de l'altitude maximale $h_n$ jusqu'au sol, donc

$$T_n = 2 \times \sqrt{\frac{2h_n}{g}} = 2 \times \sqrt{\frac{2\alpha^n h_0}{g}} = 2 \times \alpha^{n/2}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

On reconnaît l'expression de $t_0$, donc $\boxed{T_n = 2\alpha^{n/2} t_0.}$

**5 -** Pour obtenir une relation linéaire, il faut tracer $\ln(T_n)$ en fonction de $n$, puisqu'on a

$$\ln(T_n) = \frac{n}{2}\ln\alpha + \ln(2t_0).$$

On a donc une pente $a_{\text{théo}} = \frac{1}{2}\ln\alpha$ et une ordonnée à l'origine $b_{\text{théo}} = \ln(2t_0)$.

Pour obtenir $g$, on utilise $b_{\text{théo}} = \ln(2t_0) = \ln\left(\sqrt{\frac{2h_0}{g}}\right)$, ce qui donne $\boxed{g = 8h_0 \mathrm{e}^{-2b_{\text{théo}}}.}$