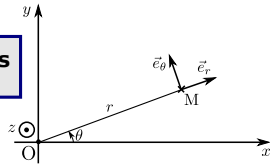


Mouvements en coordonnées non cartésiennes

I Coordonnées polaires

1 - Description des coordonnées



2 - Vecteurs position, vitesse, accélération

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r \longrightarrow \vec{v} \text{ et } \vec{a}$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$$

3 - Déplacement élémentaire

$$\vec{dl} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z \text{ à connaître}$$

$$\vec{dl} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta \text{ à savoir retrouver (schéma)}$$

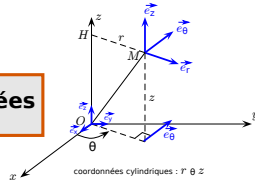
→ on en déduit $\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$

4 - Cas du mouvement circulaire

- uniforme ou non
- savoir trouver l'accélération radiale et tangentielle

II Coordonnées cylindriques

1 - Description des coordonnées



2 - Vecteurs position, vitesse, accélération

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z \longrightarrow \vec{v} \text{ et } \vec{a}$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

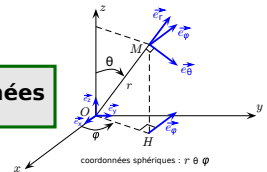
$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$$

3 - Déplacement élémentaire

$$\vec{dl} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z \text{ à savoir retrouver (schéma)}$$

III Coordonnées sphériques

1 - Description des coordonnées



2 - Vecteurs position, vitesse, accélération

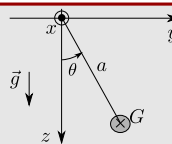
$$\vec{OM} = r\vec{e}_r \text{ et pour } \vec{v} \text{ et } \vec{a}$$

3 - Déplacement élémentaire

à savoir retrouver (schéma)

IV Application : le pendule simple

- a/ Équation du mouvement
Approximation linéaire
Résolution
- b/ Équation du portrait de phase



↑ **Cinématique** (étude du mouvement sans s'intéresser à ses causes)

↓ **Dynamique** (étude du mouvement provoqué par l'action des forces)

Ce qu'il faut connaître

_____ (cours : I)

- ₁ Réaliser un schéma avec les coordonnées polaires. Comment s'exprime \vec{OM} ? Quelles sont les coordonnées d'un point M? Quels sont les domaines de variations de ces coordonnées?
- ₂ Comment s'expriment $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$?
- ₃ Quelle est la définition d'un mouvement circulaire uniforme? Et circulaire non uniforme?
- ₄ Pour une trajectoire plane, vers quel lieu le vecteur accélération pointe-t-il?

_____ (cours : II)

- ₅ Réaliser un schéma avec les coordonnées cylindriques. Comment s'exprime \vec{OM} ? Quelles sont les coordonnées d'un point M? Quels sont les domaines de variations de ces coordonnées?
- ₆ Comment s'expriment $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$?

_____ (cours : III)

- ₇ Réaliser un schéma avec les coordonnées sphériques (faisant apparaître les vecteurs de la base locale). Comment s'exprime \vec{OM} ? Quelles sont les coordonnées d'un point M? Quels sont les domaines de variation de ces coordonnées?

Ce qu'il faut savoir faire

_____ (cours : I et II)

►₈ Établir les composantes des vecteurs position, vitesse et accélération dans un repère polaire (cours partie I) ou cylindrique (cours partie II). → **EC2, EC2bis**

►₉ Exprimer à partir d'un schéma l'expression du déplacement élémentaire \vec{dl} en coordonnées cartésiennes, polaires (cours partie I) ou cylindriques (cours partie II). En déduire l'expression du vecteur vitesse. cours I.3 et II.3

►₁₀ Cas particulier du mouvement circulaire (uniforme ou non) : savoir retrouver les expressions des vecteurs vitesse et accélération ; identifier les liens entre rayon de la trajectoire, norme de la vitesse, sa dérivée, et les composantes de l'accélération. → **EC3, TD II**

_____ (cours : III)

►₁₁ Exprimer à partir d'un schéma l'expression du déplacement élémentaire \vec{dl} en coordonnées sphériques. cours III.3

_____ (cours : IV)

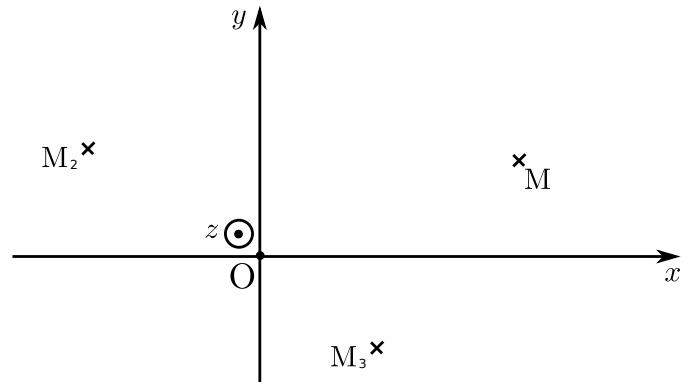
►₁₂ Savoir mener l'étude du pendule simple à l'aide du principe fondamental de la dynamique (en coordonnées polaires) : établir l'équation du mouvement, faire l'approximation linéaire pour se ramener au cadre de l'oscillateur harmonique, résoudre l'équation. → **EC4**

►₁₃ Pendule simple : dans l'approximation linéaire, savoir établir l'équation du portrait de phase. cours IV

Exercices de cours

Exercice C1 – Coordonnées polaires

- 1 - Pour chaque point M du schéma, dessiner les vecteurs de la base \vec{e}_r et \vec{e}_θ .
- 2 - Quelle est l'expression du vecteur position en fonction des vecteurs de la base polaire et des coordonnées polaires ?
- 3 - Établir l'expression des vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ en fonction de \vec{e}_x , \vec{e}_y et θ .



Exercice C2 – Coordonnées polaires : vitesse et accélération

On se place dans un repère en coordonnées cartésiennes à deux dimensions (dans un plan).

- 1 - Faire un schéma du repère. Placer un point M .
- 2 - Donner les expressions des vecteurs \vec{OM} , \vec{v} et \vec{a} .

On ajoute un repère en coordonnées polaires.

- 3 - Faire apparaître les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ au point M , la distance r et l'angle θ .
- 4 - Que valent les dérivées $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$?
- 5 - En déduire les expressions des vecteurs \vec{OM} , \vec{v} et \vec{a} dans le repère polaire.

Exercice C2bis – Coordonnées cylindriques : vitesse et accélération

On se place dans un repère en coordonnées cylindriques.

- 1 - Faire un schéma permettant de représenter ces coordonnées. En particulier faire apparaître les vecteurs \vec{e}_r , \vec{e}_θ et \vec{e}_z au point M , les distances r et z , et l'angle θ .
- 2 - Que valent les dérivées $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$, $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$ et $\frac{d\vec{e}_z}{dt}$?
- 3 - En déduire les expressions des vecteurs \vec{OM} , \vec{v} et \vec{a} dans le repère cylindrique.

Exercice C3 – Mouvement circulaire uniforme

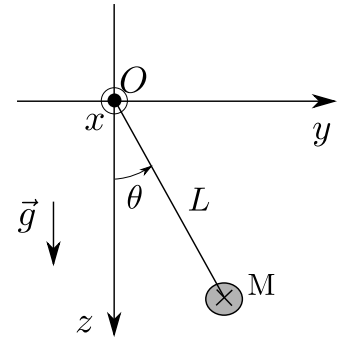
On considère un point M en mouvement circulaire uniforme, de rayon R , autour d'un centre O .

- 1 - Choisir un repère adapté à l'étude du problème. Faire un schéma.
- 2 - Exprimer le vecteur position, vitesse et accélération dans le repère de coordonnées polaires.
- 3 - Exprimer le vecteur accélération en fonction de $\|\vec{v}\|$, R et \vec{e}_r seulement.

Exercice C4 – Pendule simple

On considère un pendule dont toute la masse m est localisée au point M . Le fil reliant O à M est supposé inextensible et de masse négligeable. On note L sa longueur. On néglige tout frottement. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le champ de pesanteur est $\vec{g} = g\vec{e}_z$ avec z axe vers le bas et $g \simeq 10 \text{ m/s}^2$ constante.

- 1 - Exprimer le vecteur position \vec{OM} en coordonnées polaires. Faire de même pour la vitesse et l'accélération du point M .
- 2 - Faire un bilan des forces. À l'aide du PFD, en déduire une équation différentielle portant sur $\theta(t)$ uniquement.
- 3 - Faire une hypothèse qui permet de résoudre simplement cette équation. La résoudre. On supposera qu'à $t = 0$ le pendule est en $\theta = 0$ et qu'on lui communique une vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$.
- 4 - Que vaut la période des oscillations pour une masse de 1 kg et un fil de longueur 1.0 m ?



Méthodes

Mise en garde : ne JAMAIS écrire une égalité entre un vecteur et un scalaire !

Par exemple $m\vec{a} \neq mg$.

Méthode : Comment obtenir l'équation du mouvement pour un problème de mécanique ?

- Système : à définir.
- Référentiel : à définir.
- Repère : à définir, au choix parmi cartésien, polaire, cylindrique (et parfois sphérique).
- Schéma, en précisant les axes. Placer le point M à un instant quelconque, et les vecteurs de base.
- Bilan des forces : liste des forces ; les exprimer en fonction des vecteurs de base du repère ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ si cartésien, ou $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ si polaire, etc.) ; les représenter sur le schéma.
- Application du PFD. Il faut exprimer l'accélération \vec{a} en fonction des vecteurs de base du repère ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ si cartésien, ou $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ si polaire, etc.).
- Projection sur les vecteurs de la base pour obtenir les équations du mouvement, qui portent sur $x(t), y(t), z(t)$ si repère cartésien, ou sur $r(t), \theta(t)$ si repère polaire, etc.
- Il faut ensuite résoudre ces équations : solution générale ou primitive, déterminer les constantes avec les CI.

Cours

I – Coordonnées polaires

1 – Description des coordonnées

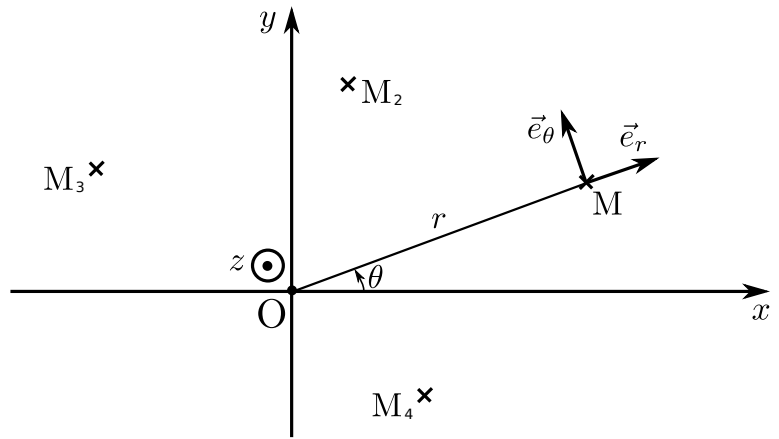
a/ Rappel sur les coordonnées cartésiennes dans un plan

- point M repéré par ses coordonnées x et y ,
- vecteurs de la base \vec{e}_x et \vec{e}_y ,
- position $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$,
- vitesse $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$,
- accélération $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y$.

b/ Coordonnées polaires

Les coordonnées polaires permettent de repérer un mouvement dans un plan, et sont appropriées dans le cas de mouvements circulaires, elliptiques, etc.

Repérage et définitions :



- ▶ Un point M est repéré par deux coordonnées : la distance r et l'angle θ .
On a $OM = r$, et θ est l'angle entre OM et l'axe des x .
- ▶ $r \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$.
- ▶ Au point M on construit un repère orthonormé direct $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$.

Attention : La base $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ est une base locale, elle varie en fonction du point M .

Ces deux vecteurs *ne sont donc pas constants*.

En revanche ils sont bien de norme 1, sont orthogonaux entre eux et forment une base directe.

↪₁ Compléter le schéma ci-dessus en faisant apparaître, pour chaque point M , les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ , la distance r et l'angle θ .

↪₂ Quelle est l'expression du vecteur position \overrightarrow{OM} en fonction des coordonnées polaires et des vecteurs de la base polaire ?

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

↪₃ Pour réviser tout ceci : **EC1**.

2 – Vecteurs position, vitesse et accélération

Dérivée des vecteurs de la base

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_r}{dt} &= \dot{\theta}\vec{e}_\theta, \\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} &= -\dot{\theta}\vec{e}_r, \end{aligned}$$

Il faut connaître par cœur ce résultat.

Démonstration :

↪₄ (à faire sur feuille) a/ Exprimer \vec{e}_r et \vec{e}_θ dans la base cartésienne. b/ Dériver par rapport au temps.

↪₅ À partir de là, il faut être capable de retrouver les expressions de \vec{v} , \vec{a} . Pour voir comment, faire l'**EC2**.

Bilan en coordonnées polaires

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

(les expressions de \vec{v} et \vec{a} ne sont pas à connaître par cœur, mais à retrouver rapidement à partir de $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$, que l'on dérive, comme dans l'EC)

3 – Déplacement élémentaire

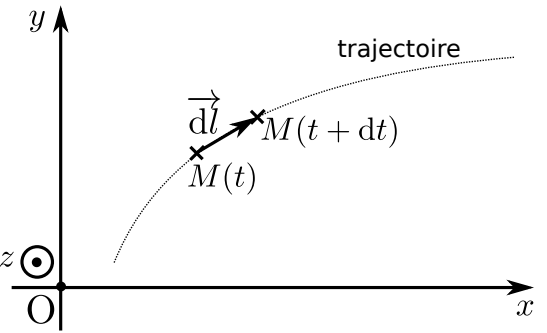
On considère un instant t , et un instant $t + dt$ très proche (dt est une durée très courte, dite *infinitésimale*).

- Instant t : le point M est en $M(t)$.
- Instant $t + dt$: le point M est en $M(t + dt)$.

On définit le déplacement élémentaire $\vec{dl} = \overrightarrow{M(t)M(t + dt)}$.

La vitesse du point M au temps t (appelée aussi vitesse instantanée) est \vec{v}

alors : $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{l}}{dt}$.



→ le calcul du déplacement élémentaire \vec{dl} permet d'obtenir l'expression de \vec{v} .

C'est donc une seconde méthode pour obtenir \vec{v} , parfois plus pratique que celle vue en I.2.

a/ En coordonnées cartésiennes dans un plan

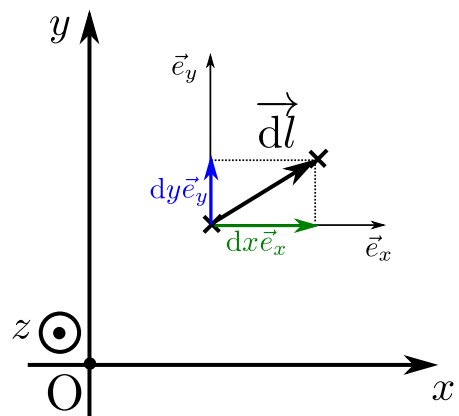
Les coordonnées du point M sont $x(t), y(t)$.

→₆ On suppose d'abord que seule la coordonnée x varie : elle passe de x à $x + dx$. Que vaut alors \vec{dl} ? (faire un schéma)

→₇ Puis on suppose que seule la coordonnée y varie : elle passe de y à $y + dy$. Que vaut alors \vec{dl} ? (faire un schéma)

Enfin, dans le cas général où les coordonnées varient toutes les deux : (x, y) devient $(x + dx, y + dy)$; il suffit de sommer les deux vecteurs \vec{dl} trouvés précédemment.

$$\vec{dl} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y.$$



On généralise au cas à 3D : $\vec{dl} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$.

Cette expression en coordonnées cartésiennes est à connaître par cœur.

Vecteur vitesse

→₈ À partir de l'expression du déplacement élémentaire ci-dessus et de la définition de la vitesse instantanée, retrouver l'expression de \vec{v} en coordonnées cartésiennes.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y}{dt} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$$

b/ En coordonnées polaires

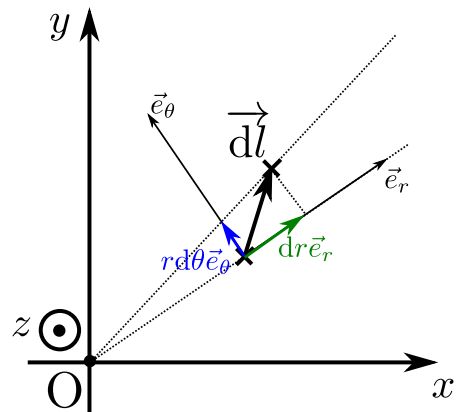
C'est le même principe, mais cette fois les coordonnées du point M sont $r(t)$ et $\theta(t)$.

→₉ On suppose d'abord que seule la coordonnée r varie : elle passe de r à $r + dr$. Que vaut alors $d\vec{l}$? (faire un schéma)

→₁₀ Puis on suppose que seule la coordonnée θ varie : elle passe de θ à $\theta + d\theta$. Que vaut alors $d\vec{l}$? (faire un schéma)

Enfin, dans le cas général où les coordonnées varient toutes les deux : (r, θ) devient $(r + dr, \theta + d\theta)$; il suffit de sommer les deux vecteurs $d\vec{l}$ trouvés précédemment.

$$\boxed{d\vec{l} = dr\vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta.}$$



Remarque : On voit sur le schéma ci-dessus qu'on aurait pu donner l'expression $d\vec{l} = dr\vec{e}_r + (r + dr)d\theta \vec{e}_\theta$.

Mais ceci s'écrit en développant $d\vec{l} = dr\vec{e}_r + rd\theta \vec{e}_\theta + drd\theta \vec{e}_\theta$, et le terme en $drd\theta$ est un infiniment petit d'ordre 2, qui est négligeable devant les autres. On trouve donc bien la même chose.

Vecteur vitesse

→₁₁ À partir de l'expression du déplacement élémentaire ci-dessus et de la définition de la vitesse instantanée, retrouver l'expression de \vec{v} en coordonnées polaires.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{dr\vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta$$

4 – Cas du mouvement circulaire

a/ Définitions

Définitions

- Mouvement circulaire : mouvement pour lequel la trajectoire décrit un cercle.

→ Pour étudier ce type de mouvement, il est judicieux de choisir un repère polaire dont le centre O est le centre du cercle.

→ La coordonnée radiale $r(t)$ est alors constante, égale au rayon R du cercle : $r(t) = R$.

Vitesse angulaire

On définit la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ (unité SI : rad/s).

On la note souvent ω . On a donc $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$.

Uniforme ou non uniforme

- Mouvement circulaire uniforme : la norme du vecteur vitesse est constante.
De façon équivalente, la vitesse angulaire est constante.
- Mouvement circulaire non uniforme : la norme du vecteur vitesse peut varier.

b/ Cas uniforme

↪₁₂ Dans le cas du mouvement circulaire *uniforme*, le vecteur vitesse est-il constant ? Le vecteur accélération est-il nul ?
 \vec{v} n'est pas constant (sa norme l'est, mais la direction du vecteur change). Donc $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \neq \vec{0}$.

↪₁₃ Étude du mouvement circulaire uniforme : faire l'EC3.

Bilan de l'exercice :

On a $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$, puis en dérivant : $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -\frac{\|\vec{v}\|^2}{R}\vec{e}_r$.

(Ces expressions ne sont pas à connaître par cœur, mais à savoir retrouver très rapidement.)

- On remarque que le vecteur accélération pointe vers le centre du cercle. Sa norme est proportionnelle à la vitesse au carré, et inversement proportionnelle au rayon de la trajectoire.
- L'accélération est dirigé vers la concavité de la trajectoire. C'est une propriété générale des trajectoires courbes :

Propriétés cinématiques générales

- Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.
- Si la trajectoire est courbe, alors le vecteur accélération est dirigé du côté de la concavité de la trajectoire.

c/ Cas non uniforme

Dans ce cas, la coordonnée $r(t) = R$ reste constante, mais la vitesse angulaire peut varier dans le temps :

$$\omega(t) = \dot{\theta} \neq \text{cst} \quad \text{donc} \quad \ddot{\theta} \neq 0.$$

↪₁₄ Reprendre l'EC3 mais dans le cas d'un mouvement circulaire non uniforme. En particulier exprimer le vecteur accélération.

1/ schéma

2/

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r,$$

avec R constant.

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = R\omega\vec{e}_\theta$$

donc $\dot{\theta} = v/R$ (idem cas uniforme).

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r \\
&= R\frac{d}{dt}\frac{v}{R}\vec{e}_\theta - R\frac{v^2}{R^2}\vec{e}_r \\
&= \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R}\vec{e}_r.
\end{aligned}$$

Commentaires :

- Composante normale à la trajectoire (appelée aussi composante radiale) : $-\frac{v^2}{R}\vec{e}_r$, idem cas uniforme
- Composante tangentielle à la trajectoire : $\frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta$

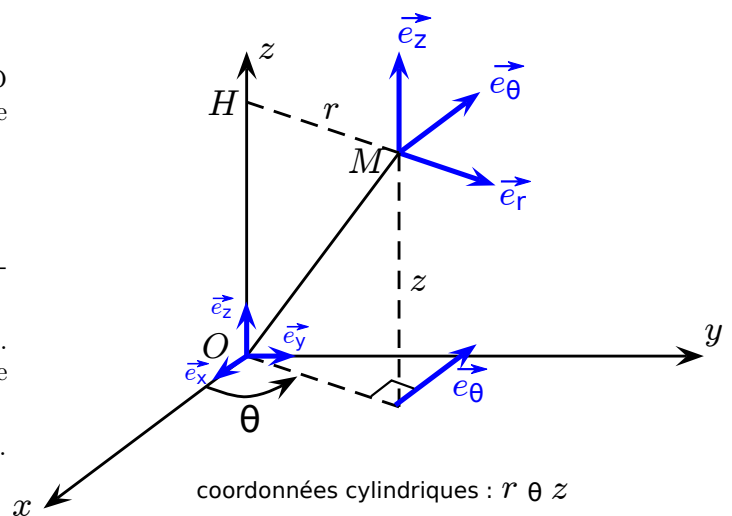
II – Coordonnées cylindriques

1 – Description des coordonnées

Les coordonnées cylindriques sont une généralisation à 3D des coordonnées polaires. Elles étendent ces dernières à une troisième dimension : la hauteur selon un axe z .

Repérage et définitions :

- Un point M est repéré par trois coordonnées : les distances r et z , et l'angle θ .
 r et θ ont les mêmes rôles qu'en coordonnées polaires.
 $r = HM$ est la distance à l'axe Oz , et θ est l'angle entre HM et l'axe des x .
 z est la hauteur du point M par rapport au plan xOy .



- $r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R}$.
- Au point M on construit un repère orthonormé direct $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$.

~15 Quelle est l'expression du vecteur position \vec{OM} en fonction des coordonnées cylindriques et des vecteurs de la base cylindriques ?

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

2 – Vecteurs position, vitesse et accélération

Dérivée des vecteurs de la base

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_r}{dt} &= \dot{\theta}\vec{e}_\theta, \\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} &= -\dot{\theta}\vec{e}_r, \\ \frac{d\vec{e}_z}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

Il faut connaître par cœur ce résultat.

Démonstration :

Les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ sont les mêmes qu'en coordonnées polaires, la démonstration est donc la même.

↪₁₆ À partir de là, il faut être capable de retrouver les expressions de \vec{v} , \vec{a} . Pour voir comment, faire l'**EC2bis**.

Bilan en coordonnées cylindriques

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$$

(les expressions de \vec{v} et \vec{a} ne sont pas à connaître par cœur, mais à retrouver rapidement à partir de $\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ que l'on dérive, comme dans l'EC)

3 – Déplacement élémentaire

Les coordonnées du point M sont $r(t)$, $\theta(t)$ et $z(t)$. Le principe est donc le même que pour les coordonnées polaires, mais on ajoute en plus une possibilité de modifier la coordonnée z .

↪₁₇ On suppose d'abord que seule la coordonnée r varie : elle passe de r à $r + dr$. Que vaut alors \vec{dl} ? (faire un schéma)

↪₁₈ Puis on suppose que seule la coordonnée θ varie : elle passe de θ à $\theta + d\theta$. Que vaut alors \vec{dl} ? (faire un schéma)

↪₁₉ Puis on suppose que seule la coordonnée z varie : elle passe de z à $z + dz$. Que vaut alors \vec{dl} ? (faire un schéma)

Enfin, dans le cas général où les coordonnées varient toutes les trois : (r, θ, z) devient $(r + dr, \theta + d\theta, z + dz)$; il suffit de sommer les trois vecteurs \vec{dl} trouvés précédemment.

→₂₀ On a donc : $\vec{dl} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$.

Vecteur vitesse

→₂₁ À partir de l'expression du déplacement élémentaire ci-dessus et de la définition de la vitesse instantanée, retrouver l'expression de \vec{v} en coordonnées cylindriques.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z$$

III – Coordonnées sphériques

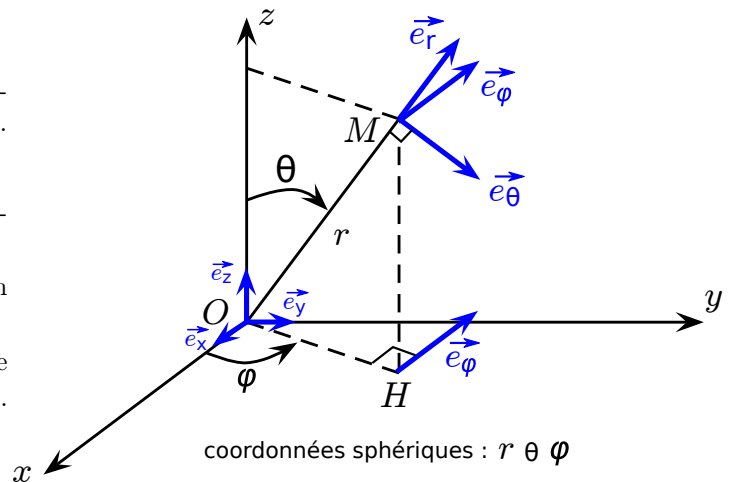
1 – Description des coordonnées

Les coordonnées sphériques sont appropriées pour la description d'un problème possédant certaines symétries sphériques.

- Un point M est repéré par trois coordonnées : la distance r , et les deux angles θ et φ .

Attention : r , θ , \vec{e}_r et \vec{e}_θ ne sont pas les mêmes qu'en coordonnées cylindriques ou polaires.

Ici $r = OM$ est la distance à l'origine, θ est l'angle entre \vec{OM} et l'axe Oz , et φ est l'angle entre \vec{HM} et l'axe Ox .



- $r \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.
- Au point M on construit un repère orthonormé direct \vec{e}_r , \vec{e}_θ , \vec{e}_φ .

→₂₂ Quelle est l'expression du vecteur position \vec{OM} en fonction des coordonnées sphériques et des vecteurs de la base sphérique ?

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r$$

2 – Vecteurs position, vitesse et accélération

Dérivée des vecteurs de la base : attention, comme les vecteurs ne sont pas les mêmes qu'en coordonnées cylindriques, on n'a pas les résultats précédents. Ainsi, $\frac{d\vec{e}_r}{dt} \neq \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \neq -\dot{\theta} \vec{e}_r$.

Les expressions de ces dérivées étant un peu complexes, on passe plutôt par le calcul du déplacement élémentaire.

Remarque : On peut montrer par projections que l'on a : $\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y)$, $\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_z + \cos \theta (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y)$, $\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y$.

3 – Déplacement élémentaire

Les coordonnées du point M sont $r(t)$, $\theta(t)$ et $\varphi(t)$.

→₂₃ On suppose d'abord que seule la coordonnée r varie : elle passe de r à $r + dr$. Que vaut alors \vec{dl} ? (faire un schéma)

→₂₄ Puis on suppose que seule la coordonnée θ varie : elle passe de θ à $\theta + d\theta$. Que vaut alors \vec{dl} ? (faire un schéma)

→₂₅ Puis on suppose que seule la coordonnée φ varie : elle passe de φ à $\varphi + d\varphi$. Que vaut alors \vec{dl} ? (faire un schéma)

Enfin, dans le cas général où les coordonnées varient toutes les trois : (r, θ, z) devient $(r + dr, \theta + d\theta, z + dz)$; il suffit de sommer les deux vecteurs \vec{dl} trouvés précédemment.

↪₂₆ On a donc : $\vec{dl} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$.

Vecteur vitesse

↪₂₇ À partir de l'expression du déplacement élémentaire ci-dessus et de la définition de la vitesse instantanée, retrouver l'expression de \vec{v} en coordonnées sphériques.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + r \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi$$

Vecteur accélération

Il suffit de dériver le vecteur vitesse \vec{v} ci-dessus. Dans le cas général l'expression est assez longue.

IV – Application : le pendule simple

Pour finir, nous nous intéressons à un problème de dynamique (étude d'un mouvement incluant l'influence des forces sur la trajectoires) qui se traite facilement en coordonnées polaires.

a/ Établir l'équation du mouvement, approximation linéaire

↪₂₈ Faire l'**EC4** sur le pendule simple.

b/ Équation du portrait de phase

Nous avons vu avec l'exercice précédent que, dans le cadre de l'approximation linéaire ($\sin \theta \sim \theta$ aux angles petits), l'équation du mouvement s'écrit $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$.

Il est possible à partir de ceci de trouver l'équation de la trajectoire dans le portrait de phase (l'équation reliant $\dot{\theta}$ et θ).

↪₂₉ Multiplier l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$, puis la mettre sous la forme $\frac{d}{dt}(\dots) = 0$. En déduire alors une équation reliant $\dot{\theta}(t)$ et $\theta(t)$. Puis tracer cette trajectoire dans le portrait de phase.