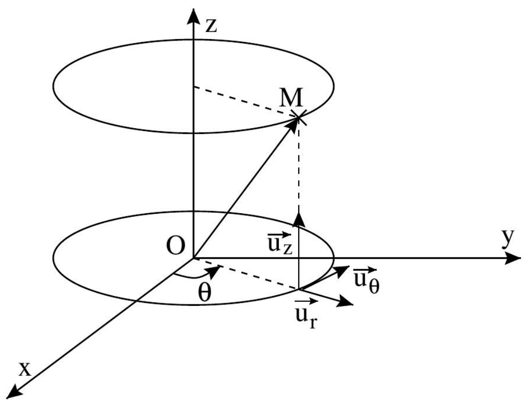
Partie VI : Mécanique
Chapitre 2

Correction – TD – Mouvements en coordonnées non cartésiennes

I Entraînement aux coordonnées polaires

Seul le schéma de gauche est correct. θ est toujours l'angle entre l'axe Ox et OM, peu importe le sens du mouvement. Et $\vec{e}_\theta$ va toujours dans le sens des θ croissants.
On aura alors $\dot{\theta} < 0$.

II Entraînement aux coordonnées cylindriques



1 - Les projections donnent

$$\vec{e}_r = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y \qquad \vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y \qquad \vec{e}_z = \vec{e}_z \tag{1}$$

2 - On peut évidemment inverser les équations précédentes, mais il est plus intéressant de raisonner aussi par projections.

$$\vec{e}_x = \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta \qquad \vec{e}_y = \sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta \qquad \vec{e}_z = \vec{e}_z \tag{2}$$

III Cinématique : rayon de courbure d'une autoroute

IV Cinématique en coordonnées cylindriques : parking

1 - Coordonnées cylindriques.

2 - $\overrightarrow{OM} = r(t)\vec{e}_r + z(t)\vec{e}_z$, avec $\boxed{r(t) = R}$ constant, et pour $z(t)$: la voiture a une vitesse selon l'axe z qui est $v_z = V_0 \sin\alpha$, donc $\boxed{z(t) = t \times V_0 \sin\alpha}$ (on suppose $z(0) = 0$).

3 - $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = R\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} + \times V_0 \sin\alpha\vec{e}_z = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \times V_0 \sin\alpha\vec{e}_z$.

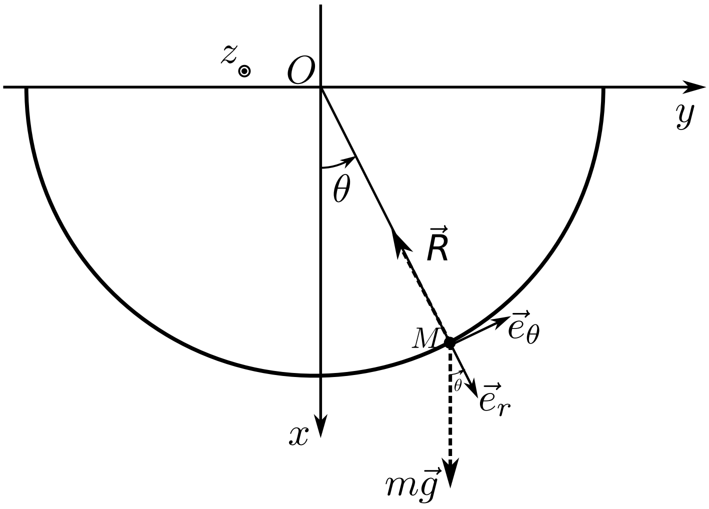
$\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + R\dot{\theta}\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$.

On sait que $\|\vec{v}\| = V_0$ est constante. Or $\|\vec{v}\| = \sqrt{(R\dot{\theta})^2 + (V_0 \sin\alpha)^2}$, c'est donc que $|\dot{\theta}|$ est constant.

On a donc $\ddot{\theta} = 0$, ce qui signifie que l'accélération tangentielle $R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$ est nulle.

V Glissade sur un igloo

VI Snowbord dans un half-pipe



1 - ⋆ Référentiel terrestre galiléen. Coordonnées polaires.

⋆ Bilan des forces sur le système {snowboarder} (faire un schéma pour les projections) :

- Poids $\vec{P} = mg\cos\theta\,\vec{e}_r - mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta$.
- Réaction $\vec{N} = N\vec{e}_r$ avec $N < 0$ (et pas de composante selon $\vec{e}_\theta$ car pas de frottements)

⋆ Accélération : on part de la position et on dérive :
- $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$
- $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$
- $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

⋆ PFD au système {snowboarder} :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N},$$

d'où :

$$mR\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - mR\dot{\theta}^2\vec{e}_r = mg\cos\theta\,\vec{e}_r - mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta + R\vec{e}_r$$

Projection sur $\vec{e}_\theta$: $mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$, d'où :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0.}$$

2 - On a donc

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\dot{\theta}\sin\theta = 0,$$

d'où :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{R}\cos\theta\right) = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{R}\cos\theta = \mathrm{cst}$$

On obtient la constante en évaluant l'expression à $t = 0$: on a $\dot{\theta} = 0$ car pas de vitesse initiale et $\cos\theta = \cos\pi/2 = 0$, donc la constante est nulle.

On a donc finalement :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{R}\cos\theta = 0, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}\cos\theta.}$$

3 - On utilise cette fois la projection sur $\vec{e}_r$ du PFD : $-mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + N$.

On isole N et on remplace $\dot{\theta}^2$ par l'expression obtenue à la question précédente :

$$N = -mg\cos\theta - mR\frac{2g}{R}\cos\theta, \text{ soit } \boxed{N = -3mg\cos\theta.}$$

Ainsi $\vec{N} = -3mg\cos\theta\vec{e}_r$, dont la norme est maximale en $\theta = 0$ (donc au centre du half-pipe) et vaut alors $\boxed{N_{\text{max}} = 3mg.}$ À ce moment là, le snowboarder a la sensation de peser trois fois son propre poids.