

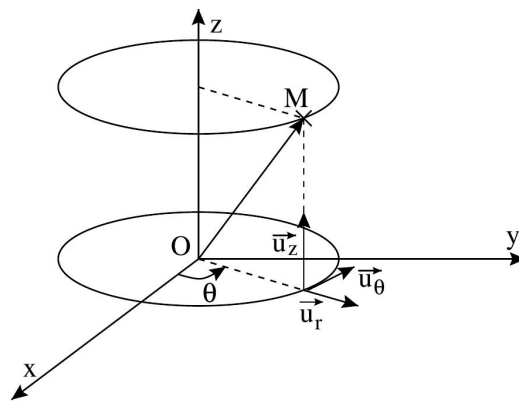
## Correction – TD – Mouvements en coordonnées non cartésiennes

### I Entraînement aux coordonnées polaires

Seul le schéma de gauche est correct.  $\theta$  est toujours l'angle entre l'axe  $Ox$  et  $OM$ , peu importe le sens du mouvement. Et  $\vec{e}_\theta$  va toujours dans le sens des  $\theta$  croissants.

On aura alors  $\dot{\theta} < 0$ .

### II Entraînement aux coordonnées cylindriques



2 - Les projections donnent

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \quad \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \quad \vec{e}_z = \vec{e}_z \quad (1)$$

3 - On peut évidemment inverser les équations précédentes, mais il est plus intéressant de raisonner aussi par projections.

$$\vec{e}_x = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta \quad \vec{e}_y = \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta \quad \vec{e}_z = \vec{e}_z \quad (2)$$

### III Cinématique : rayon de courbure d'une autoroute

2 - Il faut  $R \geq \frac{v^2}{\mu g}$ . On trouve 794 m à 110 km/h et 1108 m à 130 km/h.

### IV Cinématique en coordonnées cylindriques : parking

1 - Coordonnées cylindriques.

2 -  $\vec{OM} = r(t)\vec{e}_r + z(t)\vec{e}_z$ , avec  $r(t) = R$  constant, et pour  $z(t)$  : la voiture a une vitesse selon l'axe  $z$  qui est  $v_z = V_0 \sin \alpha$ , donc  $z(t) = t \times V_0 \sin \alpha$  (on suppose  $z(0) = 0$ ).

$$3 - \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \times V_0 \sin \alpha \vec{e}_z = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \times V_0 \sin \alpha \vec{e}_z.$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + R\dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r.$$

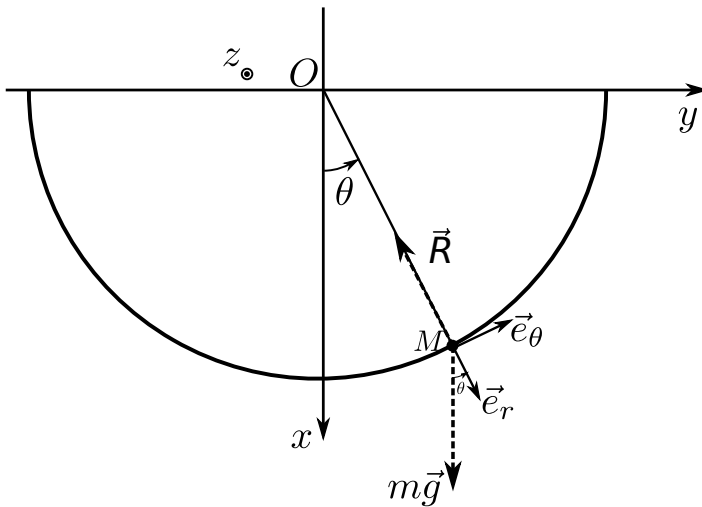
On sait que  $\|\vec{v}\| = V_0$  est constante. Or  $\|\vec{v}\| = \sqrt{(R\dot{\theta})^2 + (V_0 \sin \alpha)^2}$ , c'est donc que  $|\dot{\theta}|$  est constant.

On a donc  $\ddot{\theta} = 0$ , ce qui signifie que l'accélération tangentielle  $R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$  est nulle.

## V Glissade sur un igloo

On doit trouver, à la toute fin, un angle de décollage  $\theta = \arccos(2/3) = 48^\circ$ .

## VI Snowbord dans un half-pipe



1 - \* Référentiel terrestre galiléen. Coordonnées polaires.

\* Bilan des forces sur le système {snowboarder} (faire un schéma pour les projections) :

- Poids  $\vec{P} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$ .
- Réaction  $\vec{N} = N \vec{e}_r$  avec  $N < 0$  (et pas de composante selon  $\vec{e}_\theta$  car pas de frottements)

\* Accélération : on part de la position et on dérive :

- $\overrightarrow{OM} = R \vec{e}_r$
- $\vec{v} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$
- $\vec{a} = R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$

\* PFD au système {snowboarder} :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{N},$$

d'où :

$$m R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - m R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta + R \vec{e}_r$$

Projection sur  $\vec{e}_\theta$  :  $m R \ddot{\theta} = -mg \sin \theta$ , d'où :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0.$$

2 - On a donc

$$\dot{\theta} \ddot{\theta} + \frac{g}{R} \dot{\theta} \sin \theta = 0,$$

d'où :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{g}{R} \cos \theta \right) = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{g}{R} \cos \theta = \text{cst}$$

On obtient la constante en évaluant l'expression à  $t = 0$  : on a  $\dot{\theta} = 0$  car pas de vitesse initiale et  $\cos \theta = \cos \pi/2 = 0$ , donc la constante est nulle.

On a donc finalement :

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{g}{R} \cos \theta = 0, \quad \text{d'où} \quad \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R} \cos \theta.$$

3 - On utilise cette fois la projection sur  $\vec{e}_r$  du PFD :  $-mR\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta + N$ .

On isole  $N$  et on remplace  $\dot{\theta}^2$  par l'expression obtenue à la question précédente :

$$N = -mg \cos \theta - mR \frac{2g}{R} \cos \theta, \text{ soit } \boxed{N = -3mg \cos \theta.}$$

Ainsi  $\vec{N} = -3mg \cos \theta \vec{e}_r$ , dont la norme est maximale en  $\theta = 0$  (donc au centre du half-pipe) et vaut alors  $\boxed{N_{\max} = 3mg.}$  À ce moment là, le snowboarder a la sensation de peser trois fois son propre poids.

## VII Cinématique : gravité artificielle

Un point  $M$  situé à une distance  $R$  du centre  $O$  de la station spatiale est en mouvement circulaire uniforme. On utilise des coordonnées polaires centrées en  $O$ .

On a donc :

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r,$$

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r.$$

On a utilisé le fait que  $\dot{\theta} = v/R$  est constant car le mouvement est circulaire uniforme.

On souhaite avoir  $\|\vec{a}\| = g$ , donc  $R\dot{\theta}^2 = g$ , donc  $\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{R}} \simeq 1 \text{ rad/s.}}$

On convertit :

$$\frac{1 \text{ rad}}{1 \text{ s}} = \frac{1 \text{ tour}/2\pi}{1 \text{ min}/60} = \frac{60}{2\pi} \text{ tr/min},$$

soit donc  $\boxed{\dot{\theta} = 1 \text{ rad/s} = 9,6 \text{ tr/min.}}$

## VIII Enroulement d'un fil

1 - \* On a  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$ .

Or  $\overrightarrow{OI} = R\vec{e}_r$ .

Comme le fil est toujours tangent à la bobine, on a  $\overrightarrow{IM}$  selon  $\vec{e}_\theta$ . Et la norme de ce vecteur est la longueur totale moins ce qui a été enroulé donc  $L - R\theta$ .

On a donc :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r + (L - R\theta)\vec{e}_\theta.}$$

\* On dérive une fois pour avoir la vitesse :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{d(L - R\theta)}{dt} \vec{e}_\theta + (L - R\theta) \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \\ &= R\dot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}\vec{e}_\theta - (L - R\theta)\dot{\theta}\vec{e}_r. \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{v} = -(L - R\theta)\dot{\theta}\vec{e}_r.}$$

\* Et on redérive pour obtenir l'accélération :

$$\vec{a} = -\frac{d(L - R\theta)}{dt} \dot{\theta}\vec{e}_r - (L - R\theta) \frac{d\dot{\theta}}{dt} \vec{e}_r - (L - R\theta)\dot{\theta} \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a} = R\dot{\theta}\dot{\theta}\vec{e}_r - (L - R\theta)\ddot{\theta}\vec{e}_r - (L - R\theta)\dot{\theta}^2\vec{e}_\theta.}$$

**2** - Bilan des forces sur le système {point matériel  $M$ } : la tension du fil  $\vec{T} = T\vec{e}_\theta$  (on rappelle que le fil est tangent, donc selon  $\vec{e}_\theta$ ).

PFD (même système, référentiel terrestre supposé galiléen) :

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{T}, \\ \Rightarrow mR\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_r - m(L - R\theta)\ddot{\vec{e}}_r - m(L - R\theta)\dot{\theta}^2\vec{e}_\theta &= T\vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

On projette sur  $\vec{e}_r$  (car sur  $\vec{e}_\theta$  il y a  $T$  qui est inconnu), et on obtient :

$$R\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_r - (L - R\theta)\ddot{\theta} = 0.$$

Or  $R\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_r - (L - R\theta)\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}((L - R\theta)\dot{\theta})$ , c'est donc que

$$(L - R\theta)\dot{\theta} = \text{cst.}$$

Cette quantité est en fait la composante de la vitesse, c'est donc que la vitesse est constante (en norme). Ainsi la constante est égale à la norme de la vitesse à  $t = 0$ , c'est-à-dire  $v_0$ . On a donc  $\boxed{(L - R\theta)\dot{\theta} = v_0}$ .

**3** - Il faut trouver une primitive de  $(L - R\theta)\dot{\theta} = L\dot{\theta} - R\theta\dot{\theta}$ .

On vérifie que  $L\dot{\theta} - R\theta\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\left(L\theta - \frac{1}{2}R\theta^2\right)$ .

On a donc

$$\frac{d}{dt}\left(L\theta - \frac{1}{2}R\theta^2\right) = v_0,$$

d'où

$$\left(L\theta - \frac{1}{2}R\theta^2\right) = v_0t + A,$$

avec  $A$  une constante d'intégration que l'on détermine en prenant  $t = 0$  dans la relation précédente :  $0 = 0 + A$  (rappelons que  $\theta(0) = 0$ ), donc  $A = 0$ . On a donc

$$\boxed{L\theta - \frac{1}{2}R\theta^2 = v_0t.}$$

**4** - Le fil est totalement enroulé lorsque  $L = R\theta$ , donc pour  $\theta = L/R$ .

On remplace dans l'expression précédente :  $L\frac{L}{R} - \frac{1}{2}R\frac{L^2}{R^2} = v_0\tau$ , d'où  $\boxed{\tau = \frac{L^2}{2Rv_0}}$ .