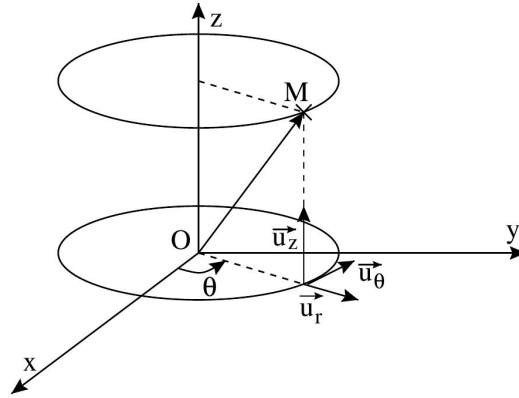


Correction – TD – Mouvements en coordonnées non cartésiennes

I Entraînement aux coordonnées cylindriques



1 - Les projections donnent

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \quad \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \quad \vec{e}_z = \vec{e}_z \quad (1)$$

2 - On peut évidemment inverser les équations précédentes, mais il est plus intéressant de raisonner aussi par projections.

$$\vec{e}_x = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta \quad \vec{e}_y = \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta \quad \vec{e}_z = \vec{e}_z \quad (2)$$

3 - Comme $|\vec{e}_r|^2 = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r$, alors

$$\frac{d}{dt} |\vec{e}_r|^2 = 2\vec{e}_r \cdot \frac{d\vec{e}_r}{dt} \quad (3)$$

mais par ailleurs $|\vec{e}_r|^2 = 1$ donc $\frac{d}{dt} |\vec{e}_r|^2 = 0$. On en déduit

$$\vec{e}_r \cdot \frac{d\vec{e}_r}{dt} = 0, \quad (4)$$

ce qui signifie bien que \vec{e}_r et $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ sont perpendiculaires.

II Cinématique : rayon de courbure d'une autoroute

III Cinématique en coordonnées cylindriques : parking

1 - Coordonnées cylindriques.

2 - $\vec{OM} = r(t)\vec{e}_r + z(t)\vec{e}_z$, avec $r(t) = R$ constant, et pour $z(t)$: la voiture a une vitesse selon l'axe z qui est $v_z = V_0 \sin \alpha$, donc $z(t) = t \times V_0 \sin \alpha$ (on suppose $z(0) = 0$).

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R \frac{d\vec{e}_r}{dt} + V_0 \sin \alpha \vec{e}_z = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta + V_0 \sin \alpha \vec{e}_z.$$

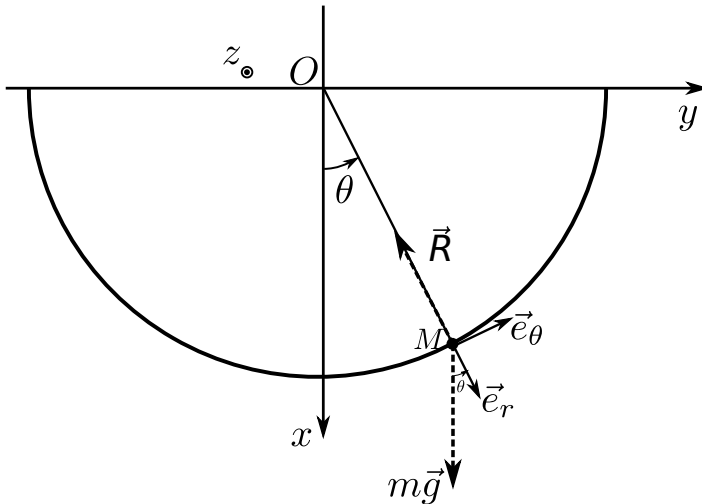
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta + R\dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r.$$

On sait que $\|\vec{v}\| = V_0$ est constante. Or $\|\vec{v}\| = \sqrt{(R\dot{\theta})^2 + (V_0 \sin \alpha)^2}$, c'est donc que $|\dot{\theta}|$ est constant.

On a donc $\ddot{\theta} = 0$, ce qui signifie que l'accélération tangentielle $R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$ est nulle.

IV Glissade sur un igloo

V Snowbord dans un half-pipe



1 - ★ Référentiel terrestre galiléen. Coordonnées polaires.

★ Bilan des forces sur le système {snowboarder} (faire un schéma pour les projections) :

- Poids $\vec{P} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$.

- Réaction $\vec{N} = N \vec{e}_r$ avec $N < 0$ (et pas de composante selon \vec{e}_θ car pas de frottements)

★ Accélération : on part de la position et on dérive :

- $\overrightarrow{OM} = R \vec{e}_r$

- $\vec{v} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

- $\vec{a} = R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$

★ PFD au système {snowboarder} :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{N},$$

d'où :

$$m R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - m R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta + R \vec{e}_r$$

Projection sur \vec{e}_θ : $m R \ddot{\theta} = -mg \sin \theta$, d'où :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0.$$

2 - On a donc

$$\dot{\theta} \ddot{\theta} + \frac{g}{R} \dot{\theta} \sin \theta = 0,$$

d'où :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{g}{R} \cos \theta \right) = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{g}{R} \cos \theta = \text{cst}$$

On obtient la constante en évaluant l'expression à $t = 0$: on a $\dot{\theta} = 0$ car pas de vitesse initiale et $\cos \theta = \cos \pi/2 = 0$, donc la constante est nulle.

On a donc finalement :

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{g}{R} \cos \theta = 0, \quad \text{d'où} \quad \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R} \cos \theta.$$

3 - On utilise cette fois la projection sur \vec{e}_r du PFD : $-mR\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta + N$.

On isole N et on remplace $\dot{\theta}^2$ par l'expression obtenue à la question précédente :

$$N = -mg \cos \theta - mR \frac{2g}{R} \cos \theta, \text{ soit } \boxed{N = -3mg \cos \theta.}$$

Ainsi $\vec{N} = -3mg \cos \theta \vec{e}_r$, dont la norme est maximale en $\theta = 0$ (donc au centre du half-pipe) et vaut alors $\boxed{N_{\max} = 3mg}$. À ce moment là, le snowboarder a la sensation de peser trois fois son propre poids.