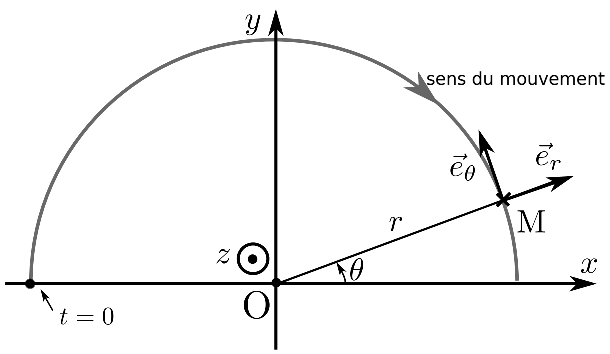
Mécanique
Chapitre 2

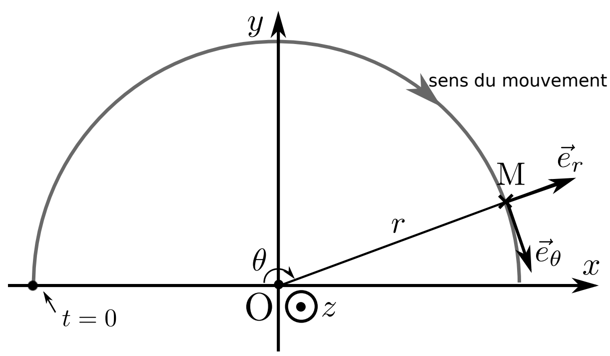
TD – Mouvements en coordonnées non cartésiennes

Remarque : exercice avec $\star$: exercice particulièrement important, à maîtriser en priorité (de même que les exemples de questions de cours des "ce qu'il faut savoir faire") | [$\bullet \circ \circ$] : difficulté des exercices

I Entraînement aux coordonnées polaires $\star$ | [$\bullet \circ \circ$]

On considère le mouvement ci-dessous. Choisir parmi les deux propositions celle qui consiste en un repérage correct.





II Entraînement aux coordonnées cylindriques [$\bullet \circ \circ$]

On considère une base cartésienne de centre O et de vecteurs unitaires $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On lui superpose la base cylindrique de même centre et de vecteurs unitaires $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ et on note θ l'angle orienté de $\vec{e}_x$ vers $\vec{e}_r$.

1 - Faire un schéma représentant les six vecteurs définis précédemment et l'angle θ.

2 - Exprimer les trois vecteurs de la base cylindrique dans la base cartésienne (donc par exemple exprimer $\vec{e}_r$ en fonction de $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$, etc).

3 - Exprimer les trois vecteurs de la base cartésienne dans la base cylindrique (donc par exemple exprimer $\vec{e}_x$ en fonction de $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_z$, etc).

III Cinématique : rayon de courbure d'une autoroute ★ | [● ● ○]

1 - On considère une voiture roulant à vitesse constante V_0 dans un virage circulaire de rayon R. Déterminer l'expression de son vecteur accélération, en fonction de R, V_0 et d'un vecteur unitaire bien choisi.

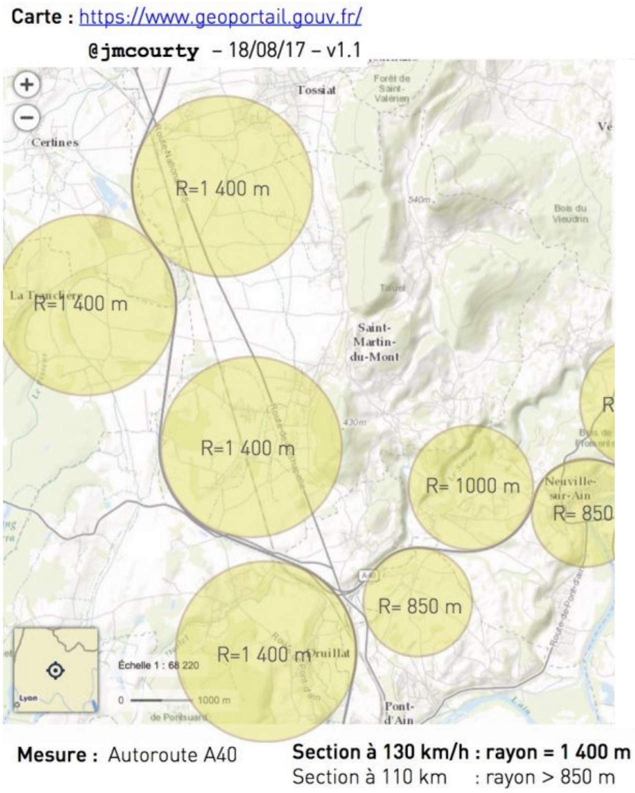
La suite de cet exercice s'intéresse au rayon d'un virage d'autoroute, et a pour objectif de répondre à la question : quel rayon choisir pour une limitation de vitesse donnée, qui garantisse que l'adhérence pneu-sol est maintenue ?

On considère usuellement qu'une voiture ne dérape pas si l'accélération qu'elle subie dans une courbe ne dépasse pas μg, avec g la norme de l'accélération de la pesanteur et μ un coefficient numérique. Pour avoir une certaine marge de sécurité, on prend $\mu = 0{,}12$.

2 - En déduire le rayon à donner à un virage d'autoroute sur une portion limitée à $130\,\mathrm{km/h}$. Puis à $110\,\mathrm{km/h}$.

3 - Vos résultats sont-ils en accord avec l'analyse graphique ci-contre ?

(extraite de https://www.questionsdephysique.fr/qf004_rayon-courbes-autoroute/)



IV Cinématique en coordonnées cylindriques : parking _ [● ○ ○]

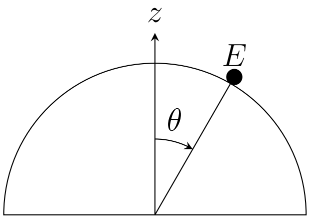
On considère une voiture qui parcourt une rampe d'accès à un parking, qui permet d'accéder aux différents étages. Cette rampe est hélicoïdale, c'est-à-dire que la distance entre l'axe du parking et une voiture qui parcourt la rampe reste constante égale à $R = 30\,\mathrm{m}$, et l'angle α entre la route et l'horizontale est constant.
De plus, la voiture roule à vitesse constante V_0. On décrit la voiture par un point M.

1 - Quel système de coordonnées est-il judicieux d'utiliser ?

2 - Donner les expressions de $z(t)$ et de $r(t)$ dans ce système de coordonnées (on supposera la vitesse selon z donnée, par exemple $v_z = 1{,}5\,\mathrm{m/s}$).

3 - Donner l'expression de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$ de la voiture. On montrera en particulier que l'accélération est radiale, c'est-à-dire dirigée selon $\vec{e}_r$.

V Glissade sur un igloo ★ | [• • ○]



Cet exercice s'intéresse à la glissade d'un enfant esquimau de masse m sur le toit d'un igloo d'où il s'élance (au sommet) sans vitesse initiale. On adopte le modèle suivant : l'enfant est ramené à un point matériel E, il glisse sans aucun frottement à la surface de l'igloo que l'on suppose sphérique de rayon R.

1 - Appliquer le théorème de la résultante cinétique à l'enfant pour en déduire deux équations différentielles portant sur l'angle θ. Identifier l'équation du mouvement, qui permet de déterminer $\theta(t)$. Quelle information l'autre équation contient-elle ?

2 - En multipliant l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$, montrer que $\dot{\theta}^2 = \dfrac{2g}{R}(1 - \cos\theta)$.

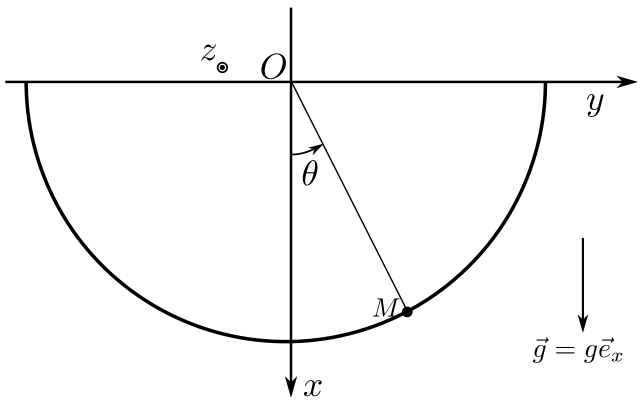
3 - En déduire l'expression de la force de réaction de l'igloo.

4 - L'enfant décolle-t-il du toit de l'igloo avant d'atteindre le sol ? Si oui, pour quel angle ?

VI Snowbord dans un half-pipe [• • ○]

On s'intéresse à un snowboarder dans un half-pipe.

Pour simplifier, on considère qu'il se déplace sur un plan en coupe perpendiculaire à l'axe du half-pipe. On assimile le snowboarder à un point matériel de masse m, qui glisse sans frottement, et on considère que le half-pipe est un demi-cylindre de rayon R constant. Le snowboarder démarre en $\theta = \pi/2$ avec une vitesse nulle.



1 - Établir l'équation du mouvement portant sur l'angle θ.

2 - Multiplier l'équation précédente par $\dot{\theta}$ et l'intégrer afin d'en déduire une expression de $\dot{\theta}^2$. On justifiera bien la constante d'intégration.

3 - En déduire l'expression de la réaction $\vec{N}$ du support.

À quel endroit de la trajectoire cette réaction est-elle maximale, et quelle expression prend-elle alors ?

Ceci peut être interprété en disant qu'a cet endroit le snowboarder ressent plusieurs fois son propre poids : combien de fois ?

Exercices supplémentaires

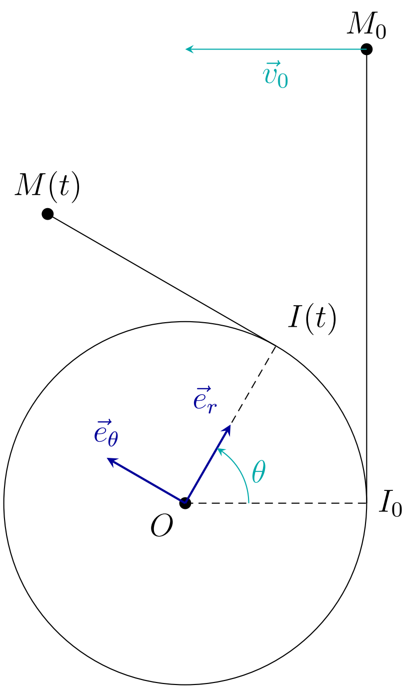
VII Cinématique : gravité artificielle [• • ∘]

Résolution de problème

On souhaite simuler une gravité artificielle dans une station spatiale très éloignée de toute planète, à l'aide d'une mise en rotation de la station. Estimer le nombre de tours par minute que doit effectuer la station autour de son axe. On pourra prendre une station de rayon 10 m.

On soignera la rédaction.

VIII Enroulement d'un fil [• • •]



Un fil de longueur L, inextensible et de masse négligeable, est accroché tangentiellement à une bobine plate de rayon R. On accroche une masse m à l'extrémité libre du fil, que l'on repère par un point M.
Au départ le point M est en M_0 comme sur le schéma, et on communique au point M une vitesse initiale $\vec{v}_0$ perpendiculaire à I_0M_0. Ceci a pour effet d'enrouler le fil autour de la bobine.
On suppose que le fil est tendu tout au long du mouvement, si bien que le fil est toujours tangent à la bobine, et que le mouvement a lieu dans un plan. On utilise la base polaire relative au point I, qui est le point du fil le plus proche de M à être en contact avec la bobine.
On négligera tout effet de la pesanteur.

1 - Montrer que $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r + (L - R\theta)\vec{e}_\theta$.

En déduire par dérivation les expressions de la vitesse et de l'accélération de M dans cette base polaire.

2 - En utilisant le PFD, montrer que $v_r = -(L - R\theta)\dot{\theta}$ est une constante du mouvement. Montrer que cette constante est égale à $-v_0$ (avec $v_0 = \|\vec{v}(t=0)\| \geq 0$).

3 - En déduire par intégration de la relation précédente la relation suivante entre θ et t : $L\theta - \dfrac{1}{2}R\theta^2 = v_0 t$.

4 - Puis déterminer la durée totale τ nécessaire pour enrouler le fil en totalité.