Partie VI : Mécanique
Chapitre 2

Correction – DM – Mouvements en coordonnées non cartésiennes

I Cinématique : gravité artificielle

Un point M situé à une distance R du centre O de la station spatiale est en mouvement circulaire uniforme. On utilise des coordonnées polaires centrées en O.
On a donc :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r,\\
&\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta\\
&\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r.
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $\dot{\theta} = v/R$ est constant car le mouvement est circulaire uniforme.

On souhaite avoir $\|\vec{a}\| = g$, donc $R\dot{\theta}^2 = g$, donc $\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\dfrac{g}{R}} \simeq 1\,\mathrm{rad/s}.}$

On convertit :

$$\frac{1\,\mathrm{rad}}{1\,\mathrm{s}} = \frac{1\,\mathrm{tour}/2\pi}{1\,\mathrm{min}/60} = \frac{60}{2\pi}\,\mathrm{tr/min},$$

soit donc $\boxed{\dot{\theta} = 1\,\mathrm{rad/s} = 9{,}6\,\mathrm{tr/min}.}$

II Enroulement d'un fil

1 - ⋆ On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$.
Or $\overrightarrow{OI} = R\vec{e}_r$.

Comme le fil est toujours tangent à la bobine, on a $\overrightarrow{IM}$ selon $\vec{e}_\theta$. Et la norme de ce vecteur est la longueur totale moins ce qui a été enroulé donc $L - R\theta$.

On a donc :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r + (L - R\theta)\vec{e}_\theta.}$$

⋆ On dérive une fois pour avoir la vitesse :

$$\begin{aligned}
\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} &= R\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(L-R\theta)}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta + (L-R\theta)\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t}\\
&= R\dot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}\vec{e}_\theta - (L-R\theta)\dot{\theta}\vec{e}_r.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{v} = -(L-R\theta)\dot{\theta}\vec{e}_r.}$$

⋆ Et on redérive pour obtenir l'accélération :

$$\vec{a} = -\frac{\mathrm{d}(L-R\theta)}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\vec{e}_r - (L-R\theta)\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r - (L-R\theta)\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}$$
$$\boxed{\vec{a} = R\dot{\theta}\dot{\theta}\vec{e}_r - (L-R\theta)\ddot{\theta}\vec{e}_r - (L-R\theta)\dot{\theta}^2\vec{e}_\theta.}$$

2 - Bilan des forces sur le système {point matériel M} : la tension du fil $\vec{T} = T\vec{e}_\theta$ (on rappelle que le fil est tangent, donc selon $\vec{e}_\theta$.

PFD (même système, référentiel terrestre supposé galiléen) :

$$\begin{aligned} & m\vec{a} = \vec{T}, \\ \Rightarrow\quad & mR\dot{\theta}\dot{\theta}\vec{e}_r - m(L-R\theta)\ddot{\theta}\vec{e}_r - m(L-R\theta)\dot{\theta}^2\vec{e}_\theta = T\vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

On projette sur $\vec{e}_r$ (car sur $\vec{e}_\theta$ il y a T qui est inconnu), et on obtient :

$$R\dot{\theta}\dot{\theta}\vec{e}_r - (L-R\theta)\ddot{\theta} = 0.$$

Or $R\dot{\theta}\dot{\theta}\vec{e}_r - (L-R\theta)\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big((L-R\theta)\dot{\theta}\Big)$, c'est donc que

$$(L-R\theta)\dot{\theta} = \text{cst}.$$

Cette quantité est en fait la composante de la vitesse, c'est donc que la vitesse est constante (en norme). Ainsi la constante est égale à la norme de la vitesse à $t=0$, c'est-à-dire v_0. On a donc $\boxed{(L-R\theta)\dot{\theta} = v_0.}$

3 - Il faut trouver une primitive de $(L-R\theta)\dot{\theta} = L\dot{\theta} - R\theta\dot{\theta}$.

On vérifie que $L\dot{\theta} - R\theta\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\theta - \frac{1}{2}R\theta^2\right)$.

On a donc
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\theta - \frac{1}{2}R\theta^2\right) = v_0,$$
d'où
$$\left(L\theta - \frac{1}{2}R\theta^2\right) = v_0 t + A,$$
avec A une constante d'intégration que l'on détermine en prenant $t=0$ dans la relation précédente : $0 = 0 + A$ (rappelons que $\theta(0) = 0$), donc $A = 0$. On a donc

$$\boxed{L\theta - \frac{1}{2}R\theta^2 = v_0 t.}$$

4 - Le fil est totalement enroulé lorsque $L = R\theta$, donc pour $\theta = L/R$.

On remplace dans l'expression précédente : $L\frac{L}{R} - \frac{1}{2}R\frac{L^2}{R^2} = v_0\tau$, d'où $\boxed{\tau = \frac{L^2}{2Rv_0}.}$