

Correction – DM 9 – Chute avec frottements et résolution numérique

I Chute libre d'un parachutiste

1 - ★ Schéma obligatoire. ★ Système : {Luke}, référentiel terrestre supposé galiléen.

★ Bilan des forces :

- le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z$;
- la force de frottement $\vec{f} = -kv^2\vec{e}_z$ (elle est dirigée selon $-\vec{e}_z$ car la chute est purement verticale et vers le bas).

★ Principe fondamental de la dynamique : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{f}$.

Or ici $\vec{v} = v\vec{e}_z$, donc on obtient : $m\frac{dv}{dt}\vec{e}_z = mg\vec{e}_z - kv^2\vec{e}_z$.

★ Projection sur \vec{e}_z : $m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$. Soit donc : $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v^2 = g$.

2 - La vitesse limite v_l est atteinte lorsque la force de frottement finit par compenser le poids. Mathématiquement, $v_l = \text{cst}$, donc dans l'équation du mouvement $\frac{dv_l}{dt} = 0$, et il reste donc $0 + \frac{k}{m}v_l^2 = g$,

d'où $v_l = \sqrt{\frac{mg}{k}}$.

3 - On inverse la relation précédente pour isoler k : $k = \frac{mg}{v_l^2} = 18,7 \text{ kg m}^{-1}$.

4 - L'équation différentielle précédente n'est pas linéaire à cause du terme en v^2 . Elle n'est donc pas simple à résoudre.

5 - On lit sur le graphique qu'il faut 10s pour atteindre 95% de la vitesse limite. Ceci a lieu au bout d'une hauteur de chute de 350m environ. C'est donc assez rapide et la plus grande partie du saut a lieu à la vitesse limite.

II Résolution de problème : vitesse de course avant un saut

Nous avons vu que la portée d'un "tir" est $d = \frac{v_0^2}{g}$ (exercice II du TD).

Nous plaçons donc dans les hypothèses où ceci est valide : le saut est sans frottement et dans un champ de pesanteur g , avec une vitesse initiale v_0 .

Il faut estimer la distance du saut. En supposant que l'homme debout à droite mesure 1 m 90, on obtient une portée de 13,9 m.

On a donc

$$v_0 = \sqrt{gd} = 11,7 \text{ m s}^{-1} = 42 \text{ km h}^{-1}.$$

En comparaison, le record du monde de course sur 100 m en 9,58 s implique une vitesse moyenne de 37 km/h. Record battu sur cette affiche ?