Partie V : Étude des systèmes linéaires
Chapitre 5

Correction – TD – Filtres

I De l'équation différentielle à la fonction de transfert, et vice versa

1 - $\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+\dfrac{1}{\tau}e(t)=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ implique en complexe : $\mathrm{j}\omega\underline{e}+\dfrac{\underline{e}}{\tau}=\mathrm{j}\omega\underline{s}$, d'où :

$$\underline{H}=\frac{\underline{s}}{\underline{e}}=\frac{\mathrm{j}\omega+1/\tau}{\mathrm{j}\omega}=\frac{1+\mathrm{j}\tau\omega}{\mathrm{j}\tau\omega}.$$

2 - $\underline{H}=\dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}=1+\mathrm{j}\omega/\omega_0+(\mathrm{j}\omega/\omega_0)^2$ implique :

$$\begin{aligned}\underline{s}&=\underline{e}\times(1+\mathrm{j}\omega/\omega_0+(\mathrm{j}\omega/\omega_0)^2)\\&=\underline{e}+\mathrm{j}\omega\underline{e}/\omega_0+(\mathrm{j}\omega)^2\underline{e}/\omega_0^2\end{aligned}$$

D'où en repassant en réel :

$$s(t)=e(t)+\frac{1}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2e}{\mathrm{d}t^2}.$$

3 - $\underline{H}=\dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}=\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}$ implique (produit en croix) :

$$\begin{aligned}&\underline{s}\times\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+\mathrm{j}\frac{\omega}{Q\omega_0}\right]=\underline{e}\\&\underline{s}-\underline{s}\omega^2\frac{1}{\omega_0^2}+\mathrm{j}\omega\underline{s}\frac{1}{Q\omega_0}=\underline{e}.\end{aligned}$$

On écrit $-\omega^2=(\mathrm{j}\omega)^2$. Ce terme correspond donc à une dérivée seconde de s. On a donc en repassant en réel :

$$\begin{aligned}&s(t)+\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{Q\omega_0}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=e(t)\\&\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2s(t)=\omega_0^2e(t).\end{aligned}$$

4 - $\underline{H}=\dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}=\dfrac{1}{1+\mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$ implique (produit en croix) :

$$\begin{aligned}&\underline{s}\times\left[1+\mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]=\underline{e}\\&\underline{s}+\frac{Q}{\omega_0}\mathrm{j}\omega\underline{s}-Q\omega_0\frac{\mathrm{j}}{\omega}\underline{s}=\underline{e}.\end{aligned}$$

À ce stade, le terme en $1/\omega$ est gênant. On multiplie donc tout par $\mathrm{j}\omega$:

$$\mathrm{j}\omega\underline{s}+\frac{Q}{\omega_0}(\mathrm{j}\omega)^2\underline{s}+Q\omega_0\underline{s}=\mathrm{j}\omega\underline{e}.$$

D'où en réel :

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+\frac{Q}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+Q\omega_0s(t)=\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\\&\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2s(t)=\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

III Exemples de filtres ★ | [● ○ ○]

1 - ⋆ **Étude asymptotique :**

À basses fréquences, la bobine est un fil, donc $s(t) = 0$.

À hautes fréquences, le condensateur est un fil, donc $s(t) = 0$.

Il s'agit donc d'un filtre passe-bande.

⋆ **Fonction de transfert :**

Impédance équivalente à L et C en parallèle : $\dfrac{1}{\underline{Z}_{\text{éq}}} = \dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \dfrac{1}{1/\mathrm{j}C\omega} = \dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega$.

On applique ensuite un diviseur de tension :

$$\begin{aligned}\underline{s} &= \underline{e} \times \frac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{\underline{Z}_{\text{éq}} + R}\\ &= \underline{e} \times \frac{1}{1 + \dfrac{R}{\underline{Z}_{\text{éq}}}}\\ &= \underline{e} \times \frac{1}{1 + R\left(\dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega\right)}.\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + R\left(\dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega\right)}.}$$

On met sous la forme canonique du type $\boxed{\underline{H} = \dfrac{1}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}.}$ Par identification, on doit avoir :

$$\begin{cases}\dfrac{R}{L} = Q\omega_0,\\ RC = \dfrac{Q}{\omega_0}.\end{cases}$$

Après résolution, on obtient $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.

⋆ **Diagramme de Bode, asymptotes :**

– À basses fréquences, on a

$$\underline{H} \simeq \frac{1}{-\mathrm{j}Q\dfrac{\omega_0}{\omega}} \simeq \mathrm{j}\frac{\omega}{Q\omega_0}.$$

On a donc $\boxed{G_{\text{dB}} \simeq 20\log\left|\dfrac{\mathrm{j}\omega}{Q\omega_0}\right| \simeq -20\,\log Q + 20\,\log\dfrac{\omega}{\omega_0},}$ soit donc une pente de 20 dB/décade et une ordonnée à l'origine qui vaut $-20\,\log Q$.

Pour la phase : $\arg \underline{H} \simeq \pi/2$.

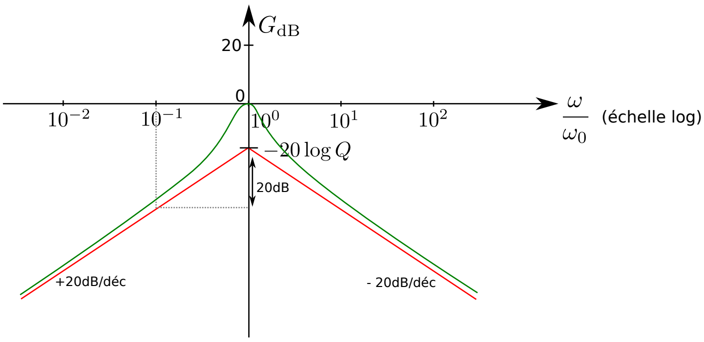
– À hautes fréquences, on a

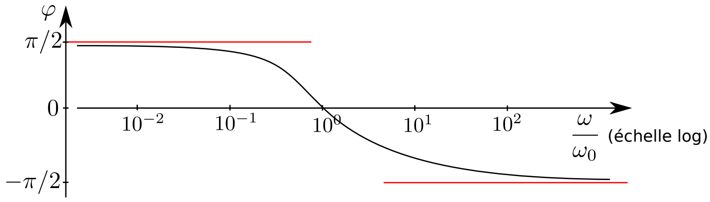
$$\underline{H} \simeq \frac{1}{\mathrm{j}Q\omega/\omega_0} \simeq \frac{-\mathrm{j}\omega_0}{Q\omega}.$$

On a donc $\boxed{G_{\text{dB}} \simeq 20\log\left|\dfrac{-\mathrm{j}\omega_0}{Q\omega}\right| \simeq -20\,\log Q - 20\,\log\dfrac{\omega}{\omega_0},}$ soit donc une pente de -20 dB/décade et une ordonnée à l'origine qui vaut $-20\,\log Q$.

Pour la phase : $\arg \underline{H} \simeq -\pi/2$.

⋆ **Tracé de l'allure** (ici dans le cas où $-20 \log Q < 0$) :





⋆ **Gain et déphasage :**

$$G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}.$$

$$\varphi = \arg \underline{H} = -\arctan \left(Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right).$$

2 - ⋆ **Étude asymptotique :**

À basses fréquences, la bobine est un fil, on a donc (loi des mailles) $s(t) = e(t)$.

À hautes fréquences, le condensateur est un fil, donc $s(t) = 0$.

Il s'agit donc d'un filtre passe-bas.

⋆ **Fonction de transfert :**

Impédance équivalente à R et C en parallèle : $\dfrac{1}{\underline{Z}_{\text{éq}}} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{1/\mathrm{j}C\omega} = \dfrac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega$.

On applique ensuite un diviseur de tension :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \underline{e} \times \frac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{\underline{Z}_{\text{éq}} + \mathrm{j}L\omega} \\ &= \underline{e} \times \frac{1}{1 + \dfrac{\mathrm{j}L\omega}{\underline{Z}_{\text{éq}}}} \\ &= \underline{e} \times \frac{1}{1 + \mathrm{j}L\omega \left(\dfrac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega \right)}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + \dfrac{\mathrm{j}L\omega}{R} - LC\omega^2}.}$$

On met sous la forme canonique du type $\boxed{\underline{H} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{\mathrm{j}}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}.}$ Par identification, on doit avoir :

$$\begin{cases} LC = \dfrac{1}{\omega_0^2}, \\ \dfrac{L}{R} = \dfrac{1}{Q\omega_0}. \end{cases}$$

Après résolution, on obtient $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.

⋆ **Diagramme de Bode, asymptotes :**

– À basses fréquences, on a

$$\underline{H} \simeq 1.$$

On a donc $\boxed{G_{\mathrm{dB}} \simeq 20 \log 1 = 0,}$ soit donc une pente nulle.

Pour la phase : $\arg \underline{H} \simeq 0$.

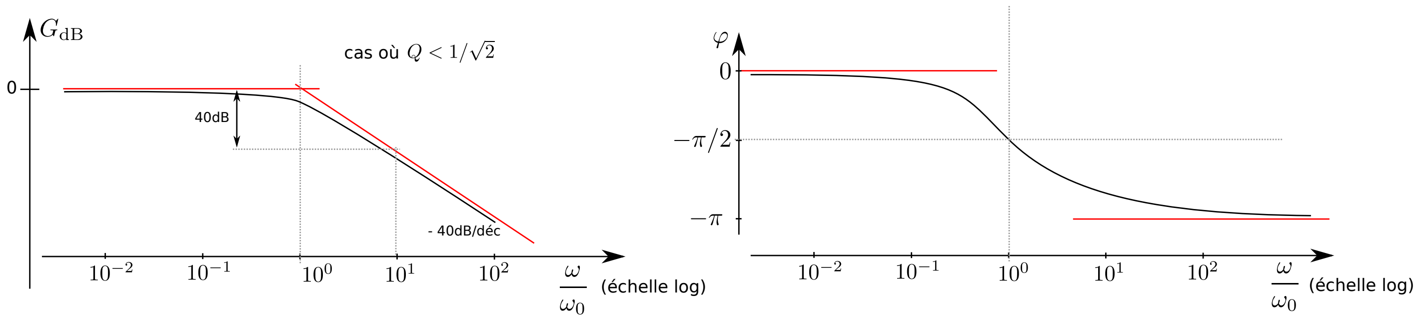
– À hautes fréquences, on a

$$\underline{H} \simeq \frac{1}{-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} \simeq -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

On a donc $\boxed{G_{\mathrm{dB}} \simeq 20 \log \left|\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right| \simeq -40 \log \dfrac{\omega}{\omega_0},}$ soit donc une pente de -40 dB/décade et une ordonnée à l'origine nulle.

Pour la phase : $\arg \underline{H} \simeq \pm\pi$. Or pour $\omega = \omega_0$ on a $\underline{H} = \dfrac{1}{\mathrm{j}/Q}$ dont l'argument est $-\pi/2$. On choisi donc un argument de $-\pi$ pour la limite haute fréquence, afin d'avoir un graphique continu.

⋆ **Tracé de l'allure :**



⋆ **Gain et déphasage :**

$$\boxed{G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\dfrac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}.}$$

Pour l'argument, on pose $x = \omega/\omega_0$ pour raccourcir les expressions. On tombe sur une partie réelle pas toujours positive, d'où l'astuce de factoriser par j :

$$\begin{aligned}
\varphi &= -\arg\left[(1 - x^2) + \mathrm{j}\frac{x}{Q}\right] \\
&= -\arg\left[\mathrm{j}\left(-\mathrm{j}(1 - x^2) + \frac{x}{Q}\right)\right] \\
&= -\arg \mathrm{j} - \arg\left(-\mathrm{j}(1 - x^2) + \frac{x}{Q}\right) \\
&= -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{-(1 - x^2)}{x/Q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi = \arctan\frac{Q(1 - x^2)}{x} - \frac{\pi}{2}}$$

3 - ⋆ **Étude asymptotique :**

À basses fréquences, la bobine est un fil, on a donc $s(t) = 0$.

À hautes fréquences, la bobine est un interrupteur ouvert donc il n'y a plus de courant qui circule, donc $u_R = 0$, donc une loi des mailles montre que $s(t) = e(t)$.

Il s'agit donc d'un filtre passe-haut.

⋆ **Fonction de transfert :**

On applique un diviseur de tension :

$$\begin{aligned}\underline{s} &= \underline{e} \times \frac{\mathrm{j}L\omega}{\mathrm{j}L\omega + R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}} \\ &= \underline{e} \times \frac{-LC\omega^2}{-LC\omega^2 + \mathrm{j}RC\omega + 1}.\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + \mathrm{j}RC\omega}.}$$

On met sous la forme canonique du type $\boxed{\underline{H} = \dfrac{-\omega^2/\omega_0^2}{1 + \dfrac{\mathrm{j}}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}.}$ Par identification, on doit avoir :

$$\begin{cases} LC = \dfrac{1}{\omega_0^2}, \\ RC = \dfrac{1}{Q\omega_0}. \end{cases}$$

Après résolution, on obtient $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

⋆ **Diagramme de Bode, asymptotes :**

– À basses fréquences, on a

$$\underline{H} \simeq \frac{-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1} \simeq -\frac{\omega^2}{\omega_0^2}.$$

On a donc $\boxed{G_{\mathrm{dB}} \simeq 20\log\left|\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right| \simeq 40\,\log\dfrac{\omega}{\omega_0},}$ soit donc une pente de 40 dB/décade et une ordonnée à l'origine nulle.

Pour la phase : $\arg\underline{H} \simeq \pm\pi$. Or pour $\omega = \omega_0$ on a $\underline{H} = \dfrac{-1}{\mathrm{j}/Q}$ dont l'argument est $\pi/2$. On choisi donc un argument de π pour la limite haute fréquence, afin d'avoir un graphique continu.

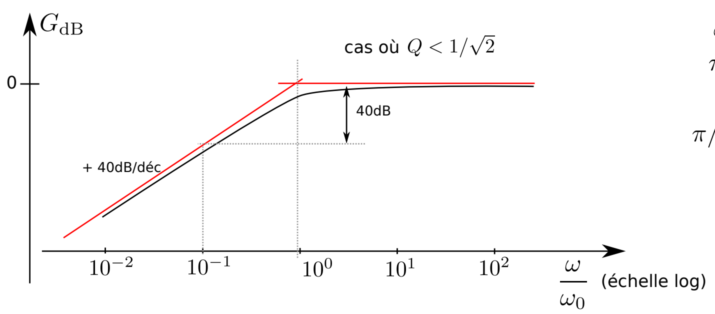
– À hautes fréquences, on a

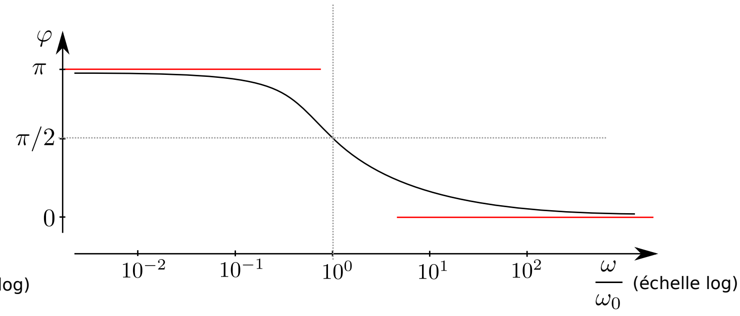
$$\underline{H} \simeq \frac{-\omega^2/\omega_0^2}{-\omega^2/\omega_0^2} \simeq 1.$$

On a donc $\boxed{G_{\mathrm{dB}} \simeq 20\log 1 = 0,}$ soit donc une pente nulle.

Pour la phase : $\arg\underline{H} \simeq 0$.

⋆ **Tracé de l'allure :**





⋆ **Gain et déphasage :**

$$\boxed{G = |\underline{H}| = \frac{\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\dfrac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}.}$$

Pour l'argument, on pose $x = \omega/\omega_0$ pour raccourcir les expressions. On tombe sur une partie réelle pas toujours positive, d'où l'astuce de factoriser par j :

$$\begin{aligned}
\varphi &= \arg(-x^2) - \arg\left[(1-x^2) + \mathrm{j}\frac{x}{Q}\right] \\
&= \pi - \arg\left[\mathrm{j}\left(-\mathrm{j}(1-x^2) + \frac{x}{Q}\right)\right] \\
&= \pi - \arg \mathrm{j} - \arg\left(-\mathrm{j}(1-x^2) + \frac{x}{Q}\right) \\
&= \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{-(1-x^2)}{x/Q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi = \arctan\frac{Q(1-x^2)}{x} + \frac{\pi}{2}}$$

Remarque : On peut montrer qu'on obtient le même gain qu'avec le passe-bas du second ordre à condition de faire le changement de variable $u = 1/x$. Ceci montre que la courbe va, ici aussi, exhiber une résonance si $Q \geq 1/\sqrt{2}$.