

I De l'équation différentielle à la fonction de transfert, et vice versa

1 - $\frac{de}{dt} + \frac{1}{\tau}e(t) = \frac{ds}{dt}$ implique en complexe : $j\omega \underline{e} + \frac{\underline{e}}{\tau} = j\omega \underline{s}$, d'où :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{j\omega + 1/\tau}{j\omega} = \frac{1 + j\tau\omega}{j\tau\omega}.$$

2 - $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = 1 + j\omega/\omega_0 + (j\omega/\omega_0)^2$ implique :

$$\begin{aligned}\underline{s} &= \underline{e} \times (1 + j\omega/\omega_0 + (j\omega/\omega_0)^2) \\ &= \underline{e} + j\omega \underline{e}/\omega_0 + (j\omega)^2 \underline{e}/\omega_0^2\end{aligned}$$

D'où en repassant en réel :

$$s(t) = e(t) + \frac{1}{\omega_0} \frac{de}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2e}{dt^2}.$$

3 - $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$ implique (produit en croix) :

$$\begin{aligned}\underline{s} \times \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} \right] &= \underline{e} \\ \underline{s} - \underline{s}\omega^2 \frac{1}{\omega_0^2} + j\omega \underline{s} \frac{1}{Q\omega_0} &= \underline{e}.\end{aligned}$$

On écrit $-\omega^2 = (j\omega)^2$. Ce terme correspond donc à une dérivée seconde de s . On a donc en repassant en réel :

$$\begin{aligned}s(t) + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{Q\omega_0} \frac{ds}{dt} &= e(t) \\ \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s(t) &= \omega_0^2 e(t).\end{aligned}$$

4 - $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ implique (produit en croix) :

$$\begin{aligned}\underline{s} \times \left[1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \right] &= \underline{e} \\ \underline{s} + \frac{Q}{\omega_0} j\omega \underline{s} - Q\omega_0 \frac{j}{\omega} \underline{s} &= \underline{e}.\end{aligned}$$

À ce stade, le terme en $1/\omega$ est gênant. On multiplie donc tout par $j\omega$:

$$j\omega \underline{s} + \frac{Q}{\omega_0} (j\omega)^2 \underline{s} + Q\omega_0 \underline{s} = j\omega \underline{e}.$$

D'où en réel :

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} + \frac{Q}{\omega_0} \frac{d^2s}{dt^2} + Q\omega_0 s(t) &= \frac{de}{dt} \\ \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s(t) &= \frac{\omega_0}{Q} \frac{de}{dt}.\end{aligned}$$

1 - ★ Étude asymptotique :

À basses fréquences, la bobine est un fil, donc $s(t) = 0$.

À hautes fréquences, le condensateur est un fil, donc $s(t) = 0$.

Il s'agit donc d'un filtre passe-bande.

★ Fonction de transfert :

Impédance équivalente à L et C en parallèle : $\frac{1}{Z_{\text{éq}}} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{1/jC\omega} = \frac{1}{jL\omega} + jC\omega$.

On applique ensuite un diviseur de tension :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \underline{e} \times \frac{Z_{\text{éq}}}{Z_{\text{éq}} + R} \\ &= \underline{e} \times \frac{1}{1 + \frac{R}{Z_{\text{éq}}}} \\ &= \underline{e} \times \frac{1}{1 + R \left(\frac{1}{jL\omega} + jC\omega \right)}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + R \left(\frac{1}{jL\omega} + jC\omega \right)}.$$

On met sous la forme canonique du type $\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$. Par identification, on doit avoir :

$$\begin{cases} \frac{R}{L} = Q\omega_0, \\ RC = \frac{Q}{\omega_0}. \end{cases}$$

Après résolution, on obtient $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$.

★ Diagramme de Bode, asymptotes :

– À basses fréquences, on a

$$\underline{H} \simeq \frac{1}{-jQ\frac{\omega_0}{\omega}} \simeq j\frac{\omega}{Q\omega_0}.$$

On a donc $G_{\text{dB}} \simeq 20 \log \left| \frac{j\omega}{Q\omega_0} \right| \simeq -20 \log Q + 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$, soit donc une pente de 20 dB/décade et une ordonnée à l'origine qui vaut $-20 \log Q$.

Pour la phase : $\arg \underline{H} \simeq \pi/2$.

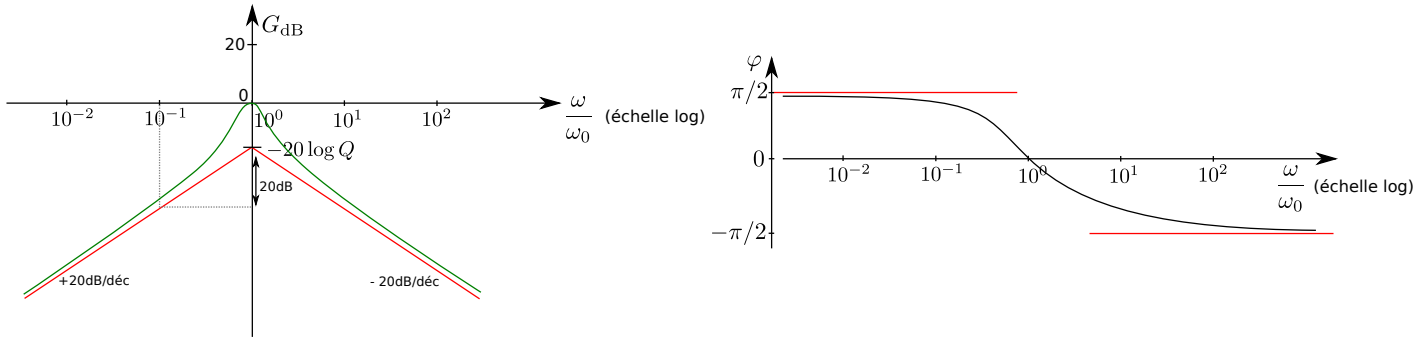
– À hautes fréquences, on a

$$\underline{H} \simeq \frac{1}{jQ\omega/\omega_0} \simeq \frac{-j\omega_0}{Q\omega}.$$

On a donc $G_{\text{dB}} \simeq 20 \log \left| \frac{-j\omega_0}{Q\omega} \right| \simeq -20 \log Q - 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$, soit donc une pente de -20 dB/décade et une ordonnée à l'origine qui vaut $-20 \log Q$.

Pour la phase : $\arg \underline{H} \simeq -\pi/2$.

★ **Tracé de l'allure :**



★ **Gain et déphasage :**

$$G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

$$\varphi = \arg \underline{H} = - \arctan \left(Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right).$$

2 - ★ **Étude asymptotique :**

À basses fréquences, la bobine est un fil, on a donc (loi des mailles) $s(t) = e(t)$.

À hautes fréquences, le condensateur est un fil, donc $s(t) = 0$.

Il s'agit donc d'un filtre passe-bas.

★ **Fonction de transfert :**

Impédance équivalente à R et C en parallèle : $\frac{1}{Z_{\text{éq}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{1/jC\omega} = \frac{1}{R} + jC\omega$.

On applique ensuite un diviseur de tension :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \underline{e} \times \frac{Z_{\text{éq}}}{Z_{\text{éq}} + jL\omega} \\ &= \underline{e} \times \frac{1}{1 + \frac{jL\omega}{Z_{\text{éq}}}} \\ &= \underline{e} \times \frac{1}{1 + jL\omega \left(\frac{1}{R} + jC\omega \right)}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{jL\omega}{R} - LC\omega^2}.$$

On met sous la forme canonique du type $\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$. Par identification, on doit avoir :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$\begin{cases} LC = \frac{1}{\omega_0^2}, \\ \frac{L}{R} = \frac{1}{Q\omega_0}. \end{cases}$$

Après résolution, on obtient $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$.

★ **Diagramme de Bode, asymptotes :**

– À basses fréquences, on a

$$\underline{H} \simeq 1.$$

On a donc $G_{dB} \simeq 20 \log 1 = 0$, soit donc une pente nulle.

Pour la phase : $\arg \underline{H} \simeq 0$.

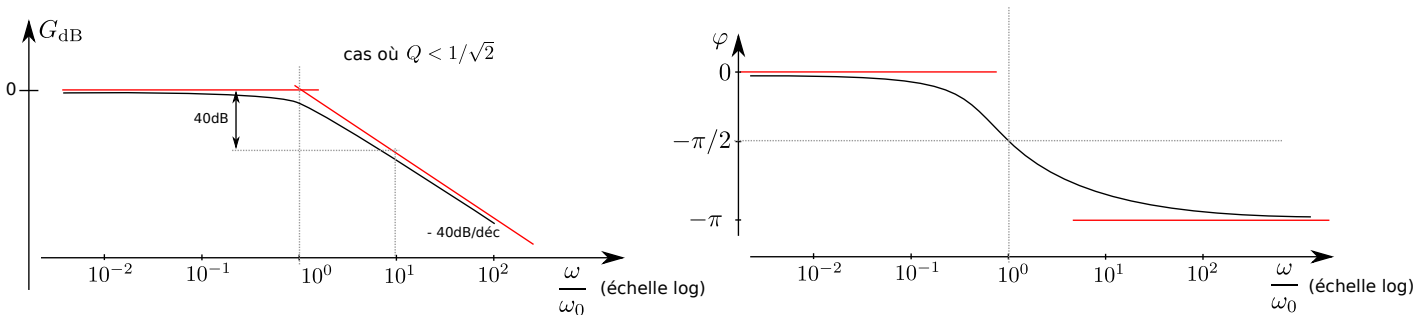
– À hautes fréquences, on a

$$\underline{H} \simeq \frac{1}{\omega^2} \simeq -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

On a donc $G_{dB} \simeq 20 \log \left| \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right| \simeq -40 \log \frac{\omega}{\omega_0}$, soit donc une pente de -40 dB/décade et une ordonnée à l'origine nulle.

Pour la phase : $\arg \underline{H} \simeq \pm\pi$. Or pour $\omega = \omega_0$ on a $\underline{H} = \frac{1}{j/Q}$ dont l'argument est $-\pi/2$. On choisi donc un argument de $-\pi$ pour la limite haute fréquence, afin d'avoir un graphique continu.

★ **Tracé de l'allure :**



★ **Gain et déphasage :**

$$G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}.$$

Pour l'argument, on pose $x = \omega/\omega_0$ pour raccourcir les expressions. On tombe sur une partie réelle pas toujours positive, d'où l'astuce de factoriser par j :

$$\begin{aligned} \varphi &= -\arg \left[(1 - x^2) + j \frac{x}{Q} \right] \\ &= -\arg \left[j \left(-j(1 - x^2) + \frac{x}{Q} \right) \right] \\ &= -\arg j - \arg \left(-j(1 - x^2) + \frac{x}{Q} \right) \\ &= -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{-(1 - x^2)}{x/Q} \end{aligned}$$

$$\varphi = \arctan \frac{Q(1 - x^2)}{x} - \frac{\pi}{2}$$

3 - ★ Étude asymptotique :

À basses fréquences, la bobine est un fil, on a donc $s(t) = 0$.

À hautes fréquences, la bobine est un interrupteur ouvert donc il n'y a plus de courant qui circule, donc $u_R = 0$, donc une loi des mailles montre que $s(t) = e(t)$.

Il s'agit donc d'un filtre passe-haut.

★ **Fonction de transfert :**

On applique un diviseur de tension :

$$\underline{s} = \underline{e} \times \frac{jL\omega}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$= \underline{e} \times \frac{-LC\omega^2}{-LC\omega^2 + jRC\omega + 1}.$$

D'où :

$$\underline{H} = \frac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

On met sous la forme canonique du type $\underline{H} = \frac{-\omega^2/\omega_0^2}{1 + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$. Par identification, on doit avoir :

$$\begin{cases} LC = \frac{1}{\omega_0^2}, \\ RC = \frac{1}{Q\omega_0}. \end{cases}$$

Après résolution, on obtient $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

★ **Diagramme de Bode, asymptotes :**

– À basses fréquences, on a

$$\underline{H} \simeq \frac{-\omega^2}{1} \simeq -\frac{\omega^2}{\omega_0^2}.$$

On a donc $G_{dB} \simeq 20 \log \left| \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right| \simeq 40 \log \frac{\omega}{\omega_0}$, soit donc une pente de 40 dB/décade et une ordonnée à l'origine nulle.

Pour la phase : $\arg \underline{H} \simeq \pm\pi$. Or pour $\omega = \omega_0$ on a $\underline{H} = \frac{-1}{j/Q}$ dont l'argument est $\pi/2$. On choisit donc un argument de π pour la limite haute fréquence, afin d'avoir un graphique continu.

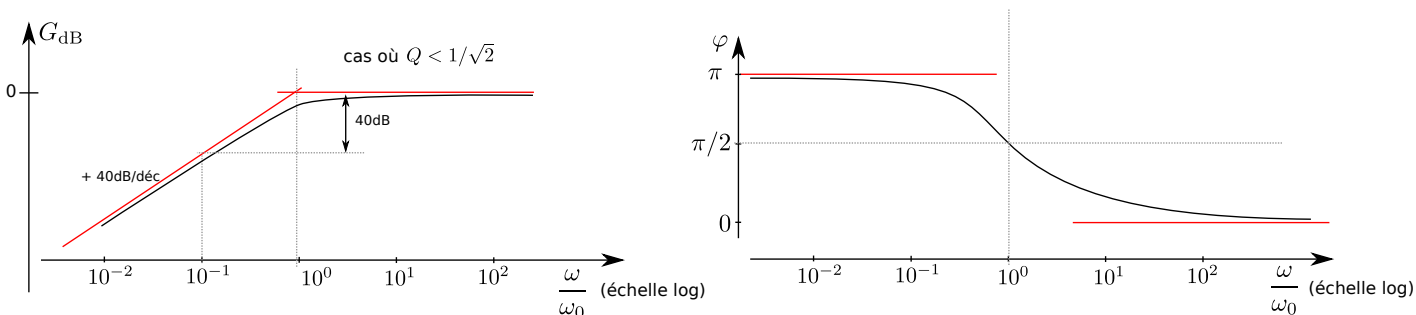
– À hautes fréquences, on a

$$\underline{H} \simeq \frac{-\omega^2/\omega_0^2}{-\omega^2/\omega_0^2} \simeq 1.$$

On a donc $G_{dB} \simeq 20 \log 1 = 0$, soit donc une pente nulle.

Pour la phase : $\arg \underline{H} \simeq 0$.

★ **Tracé de l'allure :**



★ **Gain et déphasage :**

$$G = |H| = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

Pour l'argument, on pose $x = \omega/\omega_0$ pour raccourcir les expressions. On tombe sur une partie réelle pas toujours positive, d'où l'astuce de factoriser par j :

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg(-x^2) - \arg\left[(1 - x^2) + j\frac{x}{Q}\right] \\ &= \pi - \arg\left[j\left(-j(1 - x^2) + \frac{x}{Q}\right)\right] \\ &= \pi - \arg j - \arg\left(-j(1 - x^2) + \frac{x}{Q}\right) \\ &= \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{-(1 - x^2)}{x/Q} \end{aligned}$$

$$\varphi = \arctan\frac{Q(1 - x^2)}{x} + \frac{\pi}{2}$$

Remarque : On peut montrer qu'on obtient le même gain qu'avec le passe-bas du second ordre à condition de faire le changement de variable $u = 1/x$. Ceci montre que la courbe va, ici aussi, exhiber une résonance si $Q \geq 1/\sqrt{2}$.