Correction – TD – Filtres

I De l'équation différentielle à la fonction de transfert, et vice versa

1 - $\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}e(t) = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ implique en complexe : $\mathrm{j}\omega\underline{e} + \dfrac{\underline{e}}{\tau} = \mathrm{j}\omega\underline{s}$, d'où :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\mathrm{j}\omega + 1/\tau}{\mathrm{j}\omega} = \frac{1+\mathrm{j}\tau\omega}{\mathrm{j}\tau\omega}.$$

2 - $\underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} = 1 + \mathrm{j}\omega/\omega_0 + (\mathrm{j}\omega/\omega_0)^2$ implique :

$$\begin{aligned}\underline{s} &= \underline{e} \times (1 + \mathrm{j}\omega/\omega_0 + (\mathrm{j}\omega/\omega_0)^2)\\ &= \underline{e} + \mathrm{j}\omega\underline{e}/\omega_0 + (\mathrm{j}\omega)^2\underline{e}/\omega_0^2\end{aligned}$$

D'où en repassant en réel :

$$s(t) = e(t) + \frac{1}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2e}{\mathrm{d}t^2}.$$

3 - $\underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} = \dfrac{1}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}$ implique (produit en croix) :

$$\begin{aligned}\underline{s} \times \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \mathrm{j}\frac{\omega}{Q\omega_0}\right] &= \underline{e}\\ \underline{s} - \underline{s}\omega^2\frac{1}{\omega_0^2} + \mathrm{j}\omega\underline{s}\frac{1}{Q\omega_0} &= \underline{e}.\end{aligned}$$

On écrit $-\omega^2 = (\mathrm{j}\omega)^2$. Ce terme correspond donc à une dérivée seconde de s. On a donc en repassant en réel :

$$\begin{aligned}s(t) + \frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{Q\omega_0}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= e(t)\\ \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s(t) &= \omega_0^2 e(t).\end{aligned}$$

4 - $\underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} = \dfrac{1}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$ implique (produit en croix) :

$$\begin{aligned}\underline{s} \times \left[1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] &= \underline{e}\\ \underline{s} + \frac{Q}{\omega_0}\mathrm{j}\omega\underline{s} - Q\omega_0\frac{\mathrm{j}}{\omega}\underline{s} &= \underline{e}.\end{aligned}$$

À ce stade, le terme en $1/\omega$ est gênant. On multiplie donc tout par $\mathrm{j}\omega$:

$$\mathrm{j}\omega\underline{s} + \frac{Q}{\omega_0}(\mathrm{j}\omega)^2\underline{s} + Q\omega_0\underline{s} = \mathrm{j}\omega\underline{e}.$$

D'où en réel :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + Q\omega_0 s(t) &= \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s(t) &= \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

III Exemples de filtres ★ | [● ○ ○]

1 - ★ Étude asymptotique :

À basses fréquences, la bobine est un fil, donc $s(t) = 0$.

À hautes fréquences, le condensateur est un fil, donc $s(t) = 0$.

Il s'agit donc d'un filtre passe-bande.

★ **Fonction de transfert :**

Impédance équivalente à L et C en parallèle : $\dfrac{1}{\underline{Z}_{\text{éq}}} = \dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \dfrac{1}{1/\mathrm{j}C\omega} = \dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega$.

On applique ensuite un diviseur de tension :

$$\begin{aligned}\underline{s} &= \underline{e} \times \frac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{\underline{Z}_{\text{éq}} + R}\\ &= \underline{e} \times \frac{1}{1 + \dfrac{R}{\underline{Z}_{\text{éq}}}}\\ &= \underline{e} \times \frac{1}{1 + R\left(\dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega\right)}.\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + R\left(\dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega\right)}.}$$

On met sous la forme canonique du type $\boxed{\underline{H} = \dfrac{1}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}.}$ Par identification, on doit avoir :

$$\begin{cases} \dfrac{R}{L} = Q\omega_0, \\ RC = \dfrac{Q}{\omega_0}. \end{cases}$$

Après résolution, on obtient $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.

★ **Diagramme de Bode, asymptotes :**

– À basses fréquences, on a

$$\underline{H} \simeq \frac{1}{-\mathrm{j}Q\dfrac{\omega_0}{\omega}} \simeq \mathrm{j}\frac{\omega}{Q\omega_0}.$$

On a donc $\boxed{G_{\text{dB}} \simeq 20\log\left|\dfrac{\mathrm{j}\omega}{Q\omega_0}\right| \simeq -20\,\log Q + 20\,\log\dfrac{\omega}{\omega_0},}$ soit donc une pente de 20 dB/décade et une ordonnée à l'origine qui vaut $-20\,\log Q$.

Pour la phase : $\arg \underline{H} \simeq \pi/2$.

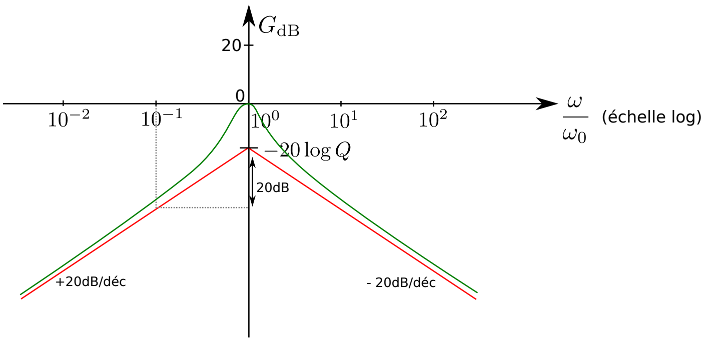
– À hautes fréquences, on a

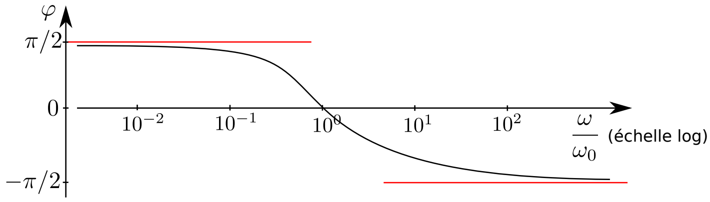
$$\underline{H} \simeq \frac{1}{\mathrm{j}Q\omega/\omega_0} \simeq \frac{-\mathrm{j}\omega_0}{Q\omega}.$$

On a donc $\boxed{G_{\text{dB}} \simeq 20\log\left|\dfrac{-\mathrm{j}\omega_0}{Q\omega}\right| \simeq -20\,\log Q - 20\,\log\dfrac{\omega}{\omega_0},}$ soit donc une pente de -20 dB/décade et une ordonnée à l'origine qui vaut $-20\,\log Q$.

Pour la phase : $\arg \underline{H} \simeq -\pi/2$.

★ **Tracé de l'allure** (ici dans le cas où $-20\log Q < 0$) :





★ **Gain et déphasage :**

$$G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}.$$

$$\varphi = \arg\underline{H} = -\arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right).$$

2 - ★ **Étude asymptotique :**

À basses fréquences, la bobine est un fil, on a donc (loi des mailles) $s(t) = e(t)$.

À hautes fréquences, le condensateur est un fil, donc $s(t) = 0$.

Il s'agit donc d'un filtre passe-bas.

★ **Fonction de transfert :**

Impédance équivalente à R et C en parallèle : $\dfrac{1}{\underline{Z}_{\text{éq}}} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{1/\mathrm{j}C\omega} = \dfrac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega$.

On applique ensuite un diviseur de tension :

$$\begin{aligned}\underline{s} &= \underline{e} \times \frac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{\underline{Z}_{\text{éq}} + \mathrm{j}L\omega} \\ &= \underline{e} \times \frac{1}{1 + \frac{\mathrm{j}L\omega}{\underline{Z}_{\text{éq}}}} \\ &= \underline{e} \times \frac{1}{1 + \mathrm{j}L\omega\left(\frac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega\right)}.\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{\mathrm{j}L\omega}{R} - LC\omega^2}.}$$

On met sous la forme canonique du type $\boxed{\underline{H} = \dfrac{1}{1 + \frac{\mathrm{j}}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}.}$ Par identification, on doit avoir :

$$\begin{cases} LC = \dfrac{1}{\omega_0^2}, \\ \dfrac{L}{R} = \dfrac{1}{Q\omega_0}. \end{cases}$$

Après résolution, on obtient $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.

★ **Diagramme de Bode, asymptotes :**

– À basses fréquences, on a

$$\underline{H} \simeq 1.$$

On a donc $\boxed{G_{\text{dB}} \simeq 20 \log 1 = 0,}$ soit donc une pente nulle.

Pour la phase : $\arg \underline{H} \simeq 0$.

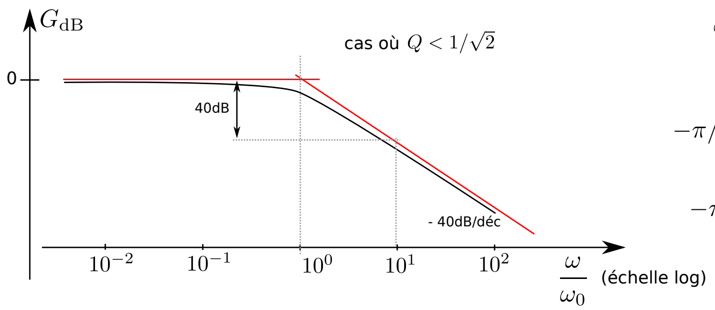
– À hautes fréquences, on a

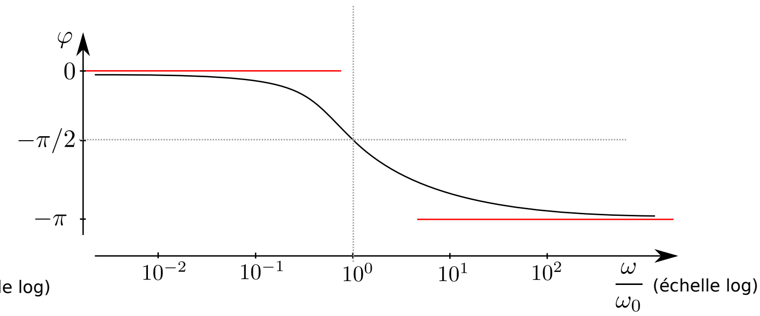
$$\underline{H} \simeq \frac{1}{-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} \simeq -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

On a donc $\boxed{G_{\text{dB}} \simeq 20 \log \left|\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right| \simeq -40 \log \dfrac{\omega}{\omega_0},}$ soit donc une pente de -40 dB/décade et une ordonnée à l'origine nulle.

Pour la phase : $\arg \underline{H} \simeq \pm\pi$. Or pour $\omega = \omega_0$ on a $\underline{H} = \dfrac{1}{\mathrm{j}/Q}$ dont l'argument est $-\pi/2$. On choisi donc un argument de $-\pi$ pour la limite haute fréquence, afin d'avoir un graphique continu.

⋆ **Tracé de l'allure :**





⋆ **Gain et déphasage :**

$$\boxed{G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\dfrac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}.}$$

Pour l'argument, on pose $x = \omega/\omega_0$ pour raccourcir les expressions. On tombe sur une partie réelle pas toujours positive, d'où l'astuce de factoriser par j :

$$\begin{aligned}
\varphi &= -\arg\left[(1 - x^2) + \mathrm{j}\frac{x}{Q}\right] \\
&= -\arg\left[\mathrm{j}\left(-\mathrm{j}(1 - x^2) + \frac{x}{Q}\right)\right] \\
&= -\arg \mathrm{j} - \arg\left(-\mathrm{j}(1 - x^2) + \frac{x}{Q}\right) \\
&= -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{-(1 - x^2)}{x/Q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi = \arctan\frac{Q(1 - x^2)}{x} - \frac{\pi}{2}}$$

3 - ⋆ Étude asymptotique :

À basses fréquences, la bobine est un fil, on a donc $s(t) = 0$.

À hautes fréquences, la bobine est un interrupteur ouvert donc il n'y a plus de courant qui circule, donc $u_R = 0$, donc une loi des mailles montre que $s(t) = e(t)$.

Il s'agit donc d'un filtre passe-haut.

⋆ **Fonction de transfert :**

On applique un diviseur de tension :

$$\underline{s} = \underline{e} \times \frac{\mathrm{j}L\omega}{\mathrm{j}L\omega + R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}} = \underline{e} \times \frac{-LC\omega^2}{-LC\omega^2 + \mathrm{j}RC\omega + 1}.$$

D'où :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + \mathrm{j}RC\omega}.}$$

On met sous la forme canonique du type $\boxed{\underline{H} = \dfrac{-\omega^2/\omega_0^2}{1 + \dfrac{\mathrm{j}}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}.}$ Par identification, on doit avoir :

$$\begin{cases} LC = \dfrac{1}{\omega_0^2}, \\ RC = \dfrac{1}{Q\omega_0}. \end{cases}$$

Après résolution, on obtient $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

⋆ **Diagramme de Bode, asymptotes :**

– À basses fréquences, on a

$$\underline{H} \simeq \frac{-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1} \simeq -\frac{\omega^2}{\omega_0^2}.$$

On a donc $\boxed{G_{\mathrm{dB}} \simeq 20\log\left|\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right| \simeq 40\,\log\dfrac{\omega}{\omega_0},}$ soit donc une pente de 40 dB/décade et une ordonnée à l'origine nulle.

Pour la phase : $\arg\underline{H} \simeq \pm\pi$. Or pour $\omega = \omega_0$ on a $\underline{H} = \dfrac{-1}{\mathrm{j}/Q}$ dont l'argument est $\pi/2$. On choisi donc un argument de π pour la limite haute fréquence, afin d'avoir un graphique continu.

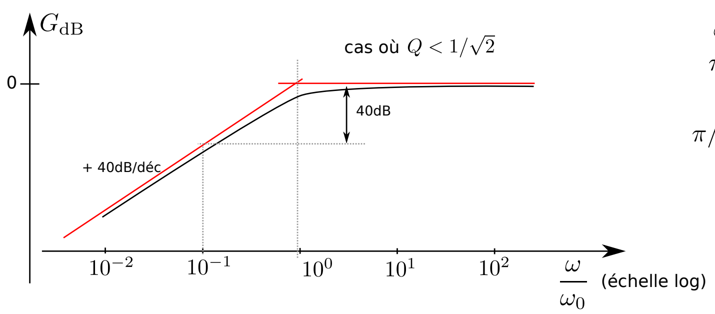
– À hautes fréquences, on a

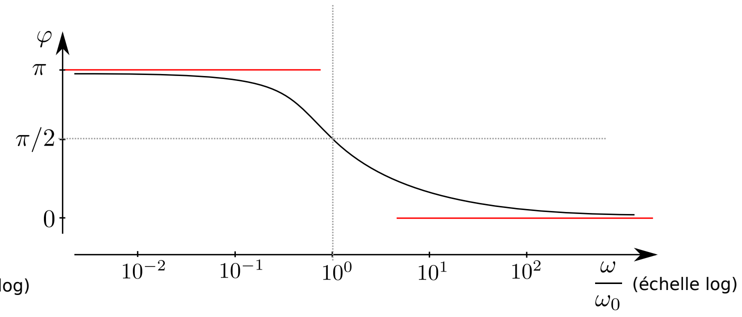
$$\underline{H} \simeq \frac{-\omega^2/\omega_0^2}{-\omega^2/\omega_0^2} \simeq 1.$$

On a donc $\boxed{G_{\mathrm{dB}} \simeq 20\log 1 = 0,}$ soit donc une pente nulle.

Pour la phase : $\arg\underline{H} \simeq 0$.

⋆ **Tracé de l'allure :**





⋆ **Gain et déphasage :**

$$\boxed{G = |\underline{H}| = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}.}$$

Pour l'argument, on pose $x = \omega/\omega_0$ pour raccourcir les expressions. On tombe sur une partie réelle pas toujours positive, d'où l'astuce de factoriser par j :

$$\begin{aligned}
\varphi &= \arg(-x^2) - \arg\left[(1-x^2)+\mathrm{j}\frac{x}{Q}\right] \\
&= \pi - \arg\left[\mathrm{j}\left(-\mathrm{j}(1-x^2)+\frac{x}{Q}\right)\right] \\
&= \pi - \arg\mathrm{j} - \arg\left(-\mathrm{j}(1-x^2)+\frac{x}{Q}\right) \\
&= \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{-(1-x^2)}{x/Q}
\end{aligned}$$

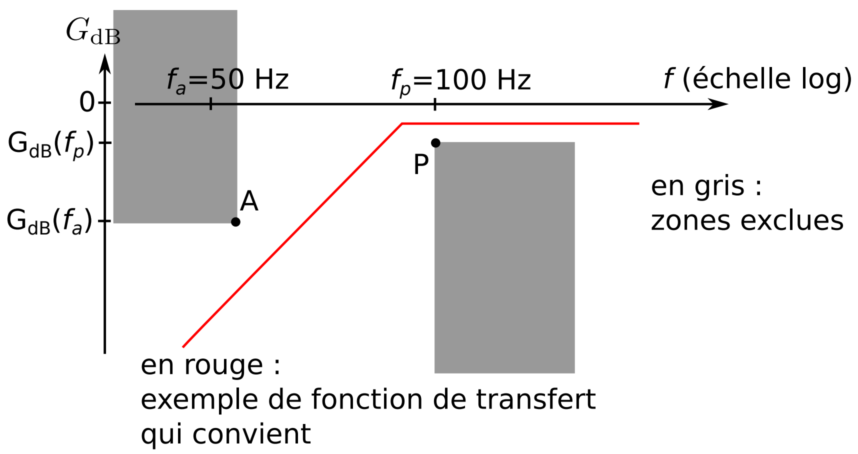
$$\boxed{\varphi = \arctan\frac{Q(1-x^2)}{x}+\frac{\pi}{2}}$$

Remarque : On peut montrer qu'on obtient le même gain qu'avec le passe-bas du second ordre à condition de faire le changement de variable $u = 1/x$. Ceci montre que la courbe va, ici aussi, exhiber une résonance si $Q \geq 1/\sqrt{2}$.

IV Gabarit d'un filtre

1 - Il faut couper à basses fréquences (pour 50 Hz et moins), mais laisser passer à hautes fréquences (au-dessus de 100 Hz). Il faut donc un filtre passe-haut.

Cf schéma :



2 - Il faut calculer la pente minimale que doit avoir G_{dB} dans le diagramme de Bode. Cette pente minimale est la pente entre les points A et P ci-dessus.

Notons S_0 l'amplitude du signal de sortie, et E_0 celle du signal d'entrée.

$\star$ Calculons le gain au point A. D'après l'énoncé l'amplitude du signal doit être divisée par 10 : $S_0 = E_0/\sqrt{10}$. Donc $\frac{S_0}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Donc

$$G_{\mathrm{dB}}(f_a) = 20\log|\underline{H}| = 20\log\frac{S_0}{E_0} = 20\log\frac{1}{\sqrt{10}} = -10\,\mathrm{dB}.$$

⋆ Calculons le gain au point P. On a de même : Donc

$$G_{\mathrm{dB}}(f_p) = 20\log|\underline{H}| = 20\log\frac{S_0}{E_0} = 20\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -3\,\mathrm{dB}.$$

⋆ La pente entre A et P est donc :

$$\text{pente} = \frac{\text{accroissement des y}}{\text{accroissement des x}} = \frac{G_{\mathrm{dB}}(f_p) - G_{\mathrm{dB}}(f_a)}{\log f_p - \log f_a} = 23\,\mathrm{dB/décade}.$$

(attention, comme c'est une échelle log en abscisse, on calcule la pente en divisant par l'accroissement de $\log f$, et non pas de f)

Cette pente est supérieure à 20 dB/déc, donc un filtre d'ordre 1 n'est pas assez pentu.

V Filtrage d'un signal créneau

On voit que le filtre coupe les basses fréquences et les hautes fréquences, mais laisse passer l'harmonique qui est vers 100 HZ : il s'agit donc d'un filtre passe-bande. On peut avancer que :

- Sa fréquence central est $f_0 \simeq 100\,\mathrm{Hz}$.
- Sa bande passante est $\Delta f \leq 150 - 50 = 100\,\mathrm{Hz}$ car le filtre coupe bien l'harmonique à 50 Hz et celle à 150 Hz.

VI Suspension de VTT

1 - On a :

$$\begin{aligned} & m\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ = kz_0(t) + \alpha\dot{z}_0 \\ \Rightarrow\ & m(\mathrm{j}\omega)^2\underline{Z} + \alpha\mathrm{j}\omega\underline{Z} + k\underline{Z} = k\underline{z}_0 + \alpha\mathrm{j}\omega\underline{z}_0 \\ \Rightarrow\ & \underline{H} = \frac{\underline{Z}}{\underline{z_0}} = \frac{k + \alpha\mathrm{j}\omega}{k - m\omega^2 + \alpha\mathrm{j}\omega} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \frac{1 + \frac{\alpha\mathrm{j}\omega}{k}}{1 - \frac{m}{k}\omega^2 + \frac{\alpha\mathrm{j}\omega}{k}} \\ &= \frac{1 + \frac{\alpha\mathrm{j}\omega}{k}\frac{\sqrt{k/m}}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{\alpha\mathrm{j}\omega}{k}\frac{\sqrt{k/m}}{\omega_0}} \\ &= \frac{1 + \frac{2\xi\mathrm{j}\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi\mathrm{j}\omega}{\omega_0}} \\ &= \frac{1 + 2\xi\mathrm{j}\,u}{1 - u^2 + 2\xi\mathrm{j}\,u} \end{aligned}$$

2 - Une fonction quelconque peut se décomposer en somme de fonctions sinusoïdales (décomposition de Fourier, avec le spectre), donc on peut faire ceci pour $F(t)$. Comme le système est linéaire, il traite chaque cosinus indépendamment, et l'atténue ou le déphase plus ou moins en fonction de sa fréquence. On étudie donc le cas d'un cosinus seul.

3 - Le vélo rencontre un caillou tout les $T = d/V$, d'où $\omega = \dfrac{2\pi V}{d}$.

4 - Il faut que le module de $\underline{H}$ soit faible, donc aller vers les hautes fréquences, donc vers les vitesses élevées. Sans toutefois perdre le contrôle...