**Partie V : Étude des systèmes linéaires**
**Chapitre 4**

# TD – Régime sinusoïdal forcé

## I Impédances équivalentes

**1 -** Ici $L$ et $C_2$ sont en parallèles. Ils sont donc équivalents à une impédance $\underline{Z}_2$ donnée par

$$\frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{j}C_2\omega}} = \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C_2\omega.$$

Donc

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C_2\omega}.$$

Enfin, l'impédance équivalente totale est

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = \underline{Z}_{C_1} + \underline{Z}_2 = \frac{1}{\mathrm{j}C_1\omega} + \frac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C_2\omega}.$$

**2 -** Le $R$ et le $C$ de gauche sont en parallèles, donc équivalents à une impédance $\underline{Z}_2$ donnée par

$$\frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega = \frac{1+\mathrm{j}RC\omega}{R}.$$

Donc

$$\underline{Z}_2 = \frac{R}{1+\mathrm{j}RC\omega}.$$

Enfin, l'impédance équivalente totale est

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \frac{R}{1+\mathrm{j}RC\omega}.$$

## II Résonance en tension du circuit RLC série

**2 -** $u_c(t) = U_{C0}\cos(\omega t + \varphi)$ est représenté par $\underline{u}_c = \underline{U}_{C0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ avec $\underline{U}_{C0} = U_{C0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$.

**3 -** On applique un diviseur de tension :

$$\begin{aligned}\underline{U}_{C0} &= \underline{E}_m \times \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L + R} \\ &= \underline{E}_m \times \frac{1/(\mathrm{j}C\omega)}{1/(\mathrm{j}C\omega) + \mathrm{j}L\omega + R} \\ &= \frac{E_0}{1 + (\mathrm{j}L\omega)(\mathrm{j}C\omega) + R\mathrm{j}C\omega} \\ &= \frac{E_0}{1 - LC\omega^2 + R\mathrm{j}C\omega}\end{aligned}$$

On souhaite identifier ceci avec la forme suivante :

$$\underline{U}_{C0} = \frac{E_0}{1 - x^2 + \mathrm{j}\dfrac{x}{Q}} = \frac{E_0}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}.$$

On doit donc avoir $\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} = LC\omega^2$, d'où $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ ;

et $\mathrm{j}\dfrac{\omega}{Q\omega_0} = R\mathrm{j}C\omega$, d'où après manipulations $\boxed{Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}.}$

**4 -** On en déduit $\boxed{U_{C0} = |\underline{U}_{C0}| = \dfrac{E_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}}}.}$

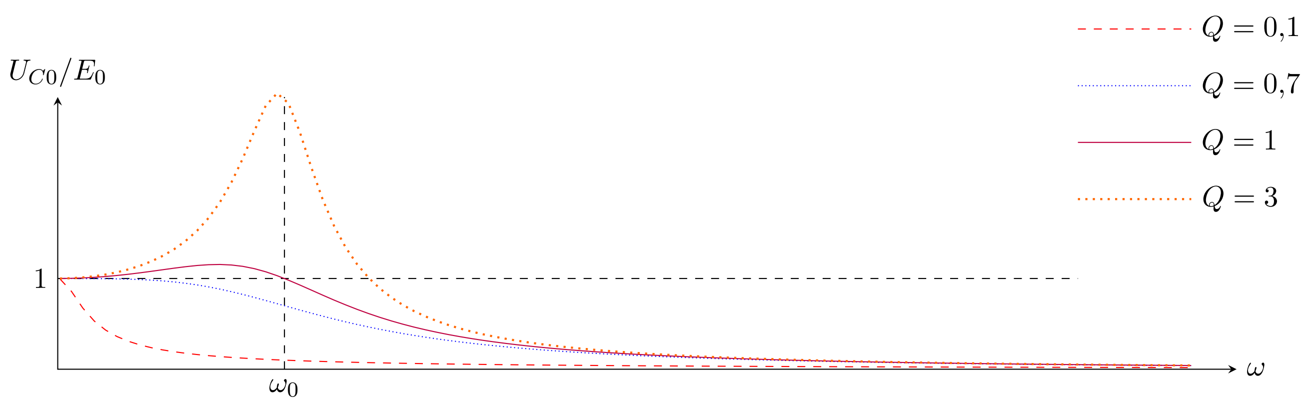
Il y a résonance si $U_{C0}(x)$ admet un maximum pour une valeur de $x \in ]0,+\infty[$. Le numérateur ne dépendant pas de $x$, ceci est équivalent au fait que le dénominateur admette un minimum. On regarde donc si la dérivée de $g(x) = (1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}$ s'annule.

On trouve que c'est toujours le cas en $x = 0$ (c'est alors un maximum ou un minimum, mais ce n'est jamais la résonance car c'est en 0), et qu'il y a une seconde possibilité en $x_r = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$, mais qui existe seulement si $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

La résonance a donc lieu seulement si $\boxed{Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}},}$ à la pulsation $\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}.}$

La tension à la résonance vaut $U_{C\max} = U_{C0}(x_r) = \dfrac{QE_0}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}.$

On a l'allure suivante :




**5 -** On a $\varphi = \arg(E_0) - \arg\left((1-x^2) + \mathrm{j}\dfrac{x}{Q}\right) = -\arg\left((1-x^2) + \mathrm{j}\dfrac{x}{Q}\right).$

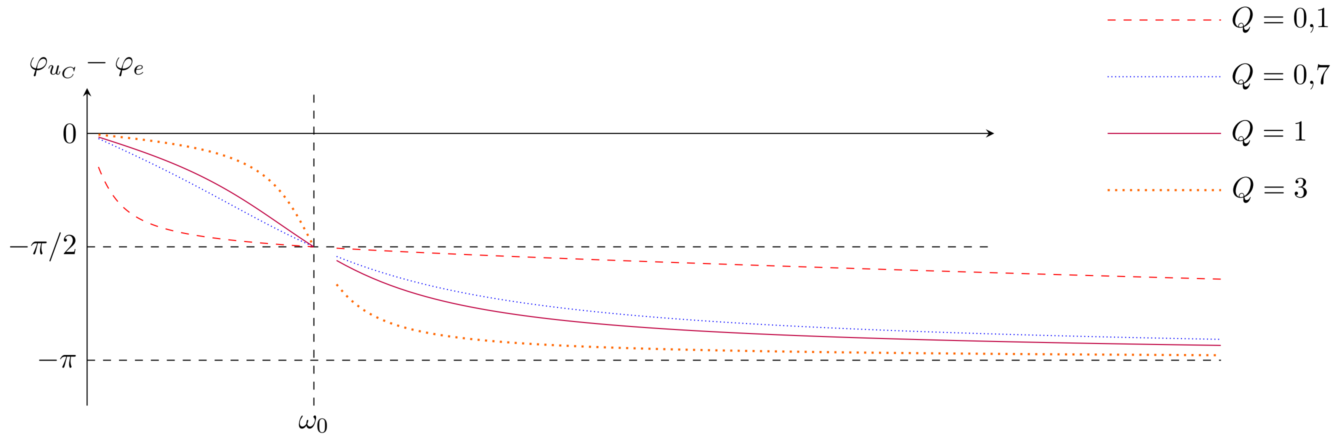
On ne peut pas utiliser l'expression avec l'arctangente car la partie réelle, $1 - x^2$, est parfois négative et parfois positive.

Astuce : on factorise par j :

$$\begin{aligned}
\varphi &= -\arg\left[(1-x^2) + \mathrm{j}\frac{x}{Q}\right] \\
&= -\arg\left[\mathrm{j}\left(-\mathrm{j}(1-x^2) + \frac{x}{Q}\right)\right] \\
&= -\arg\mathrm{j} - \arg\left(-\mathrm{j}(1-x^2) + \frac{x}{Q}\right) \\
&= -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{-(1-x^2)}{x/Q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi = \arctan\frac{Q(1-x^2)}{x} - \frac{\pi}{2}}$$

On a l'allure suivante :




**6 -** On a montré que la pulsation de résonance est $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}} < \omega_0$.

La question est de trouver $Q$ pour avoir $\omega_r = 0{,}99\omega_0$.

Ceci s'écrit aussi : $\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}} = 0{,}99$.

Soit donc $1 - \dfrac{1}{2Q^2} = 0{,}99^2$, soit donc $\dfrac{1}{2Q^2} = 1 - 0{,}99^2$,

soit donc $2Q^2 = \dfrac{1}{1 - 0{,}99^2}$,

d'où $Q = \sqrt{\dfrac{1}{2(1 - 0{,}99^2)}} = 5$.

# III Skieur face à un mur de bosses

**1 -** On a $x(t) = v \times t$.

Donc $h(t) = E_m \cos\left(\dfrac{2\pi v\, t}{\lambda}\right) = E_m \cos(\omega t)$ avec $\boxed{\omega = \dfrac{2\pi v}{\lambda}.}$

**2 -** Bilan des forces sur la masse $m$ :

$\vec{P} = -mg\vec{e}_z$ ;

$\vec{F}_r = -k[(z_{\text{éq}} + z(t) - z_{O'}) - l_0]\vec{e}_z = -k[z_{\text{éq}} + z(t) - L - h(t) - l_0]\vec{e}_z$ ;

$\vec{F} = -\alpha(\dot{z}(t) - \dot{z}_{O'}(t))\vec{e}_z = -\alpha(\dot{z}(t) - \dot{h}(t))\vec{e}_z$.

**3 -** À l'équilibre la somme des forces est nulle. Les dérivées sont nulles donc $\vec{F} = \vec{0}$.

$z(t)$ et $h(t)$ sont nuls également par définition (cf énoncé).

Il reste donc $-k(z_{\text{éq}} - L - l_0) - mg = 0$.

**4 -** PFD projeté sur $\vec{e}_z$ :

$$m\ddot{z} = -\alpha(\dot{z}(t) - \dot{h}(t)) - k[z_{\text{éq}} + z(t) - L - h(t) - l_0] - mg = -\alpha(\dot{z}(t) - \dot{h}(t)) - k[z(t) - h(t)].$$

On divise tout par $m$ et on manipule :

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{\alpha}{m}\dot{h} + \frac{k}{m}h$$

.

On identifie avec la forme $\ddot{z} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z(t) = \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{h} + \omega_0^2 h(t)$ :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}.$$

**5 -** On passe en complexe :

$$(\mathrm{j}\omega)^2\underline{Z}_m + (\mathrm{j}\omega)\frac{\omega_0}{Q}\underline{Z}_m + \omega_0^2\underline{Z}_m = (\mathrm{j}\omega)\frac{\omega_0}{Q}\underline{H}_m + \omega_0^2\underline{H}_m$$

Or l'amplitude complexe de $h$ est $E_m$.

On divise tout par $\omega_0^2$ et on en déduit que $\underline{Z}_m = \dfrac{1+\mathrm{j}x/Q}{1-x^2+\mathrm{j}x/Q}\,E_m$.

En prenant le module :

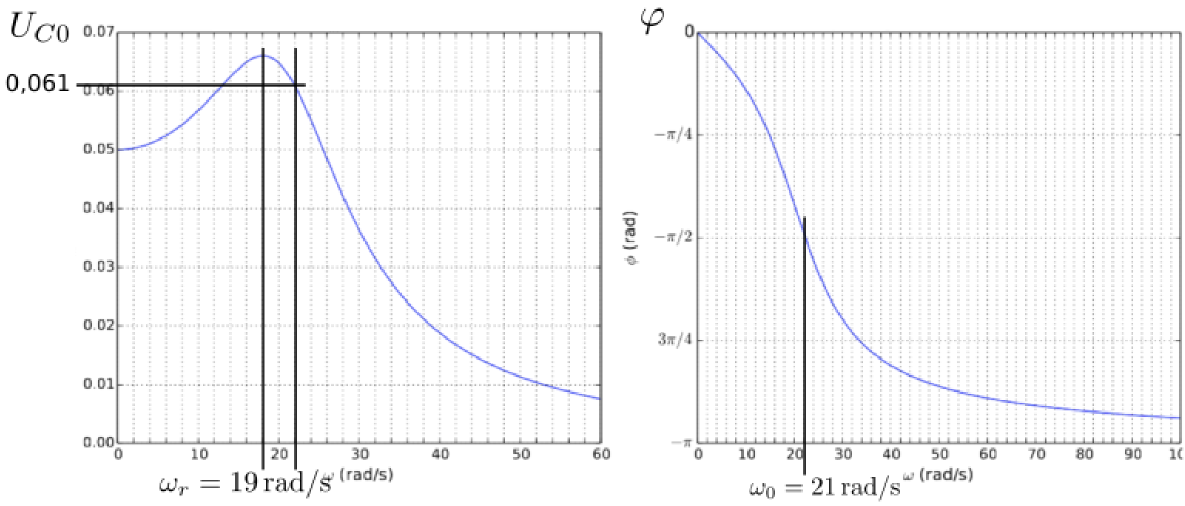
$$Z_m = \frac{\sqrt{1+x^2/Q^2}}{\sqrt{(1-x^2)^2+x^2/Q^2}}\,E_m.$$

**6 -** Il faut un facteur de qualité faible. Or $Q = \dfrac{\sqrt{km}}{\alpha}$, donc il faut une raideur faible ou un amortissement fort (s'opposer aux variations de vitesse). Cela dépend des jambes du skieur.

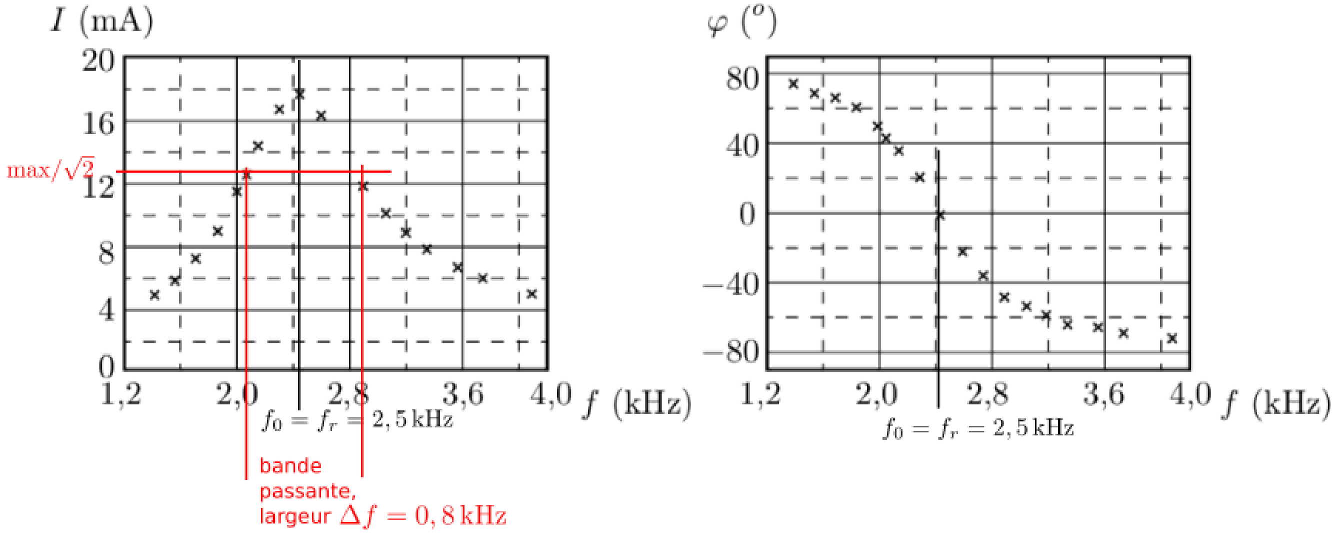
Si c'est impossible, alors il vaut mieux passer soit très lentement soit très rapidement. Pour cela il faut $\omega = \dfrac{2\pi v}{\lambda} \gg \omega_0$ (ou l'inverse), donc $v \gg \sqrt{k/m} \times \dfrac{\lambda}{2\pi}$ (ou l'inverse).

# IV Étude de graphes d'amplitude et de phase

**a/**




**b/**




⋆ Cas a/ : c'est une résonance en tension.

On a les expressions (cf cours, pas à connaître par cœur du tout mais à aller chercher dans le poly) :

$$\boxed{U_{C0} = |\underline{U}_{C0}| = \frac{E_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi = \varphi_{u_C} - \varphi_e = \arctan\frac{Q(1-x^2)}{x} - \frac{\pi}{2}.}$$

– Concernant la pulsation propre : la phase vaut $-\pi/2$ à la pulsation propre ($x=1$). On lit donc sur le graphe de phase la pulsation propre $\omega_0 = 21\,\mathrm{rad/s}$.
– Concernant $\omega_r$ : c'est là où l'amplitude est maximale. On lit donc $\omega_r = 19\,\mathrm{rad/s}$.
– Concernant $Q$ : on a $U_{C0}(x=1) = U_{C0}(x=0)\times Q$, on a donc $Q = \dfrac{U_{C0}(x=1)}{U_{C0}(x=0)} = \dfrac{0{,}061}{0{,}05} = 1{,}2$.

⋆ Cas b/ : c'est une résonance en intensité.
On a les expressions (cf poly) :

$$\boxed{I_0 = |\underline{I}_0| = \frac{E_0/R}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi = \varphi_i - \varphi_e = -\arctan\left(Q\left(x-\frac{1}{x}\right)\right).}$$

– On résonne avec les fréquences étant donné que l'abscisse du graphique est en fréquence.
– On sait que la résonance a lieu à la fréquence propre : $f_0 = f_r$. C'est là où l'amplitude est maximale, et aussi là où le déphasage est nul, ce qui se détermine facilement sur le graphique : $f_0 = f_r = 2{,}5\,\mathrm{kHz}$.
– Concernant $Q$, il faut utiliser la bande-passante et la formule $Q = \dfrac{f_0}{\Delta f}$ (cf construction sur le graphique). A.N. : $Q = 3{,}1$.

# V Antenne émettrice

**1 -** On regroupe la résistance, la bobine et le condensateur, qui sont tous les trois en parallèles, en une impédance équivalente $\underline{Z}$ donnée par :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega = \frac{\mathrm{j}L\omega + R + (\mathrm{j}C\omega)R(\mathrm{j}L\omega)}{\mathrm{j}RL\omega}.$$

D'où

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\mathrm{j}RL\omega}{\mathrm{j}L\omega + R - RLC\omega^2}.}$$

**2 -** On a $\dfrac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0} = \underline{Z}$, donc $\underline{U}_0 = \underline{Z}\times\underline{I}_0 = \underline{Z}\times I_0$ (car $\underline{I}_0 = I_0$, il n'y a pas de phase à l'origine), donc :

$$\underline{U}_0 = \frac{I_0\,\mathrm{j}RL\omega}{\mathrm{j}L\omega + R - RLC\omega^2}.$$

Pour la suite, il est plus futé de tout diviser par $\mathrm{j}L\omega$ afin de retrouver une fonction du type de celle pour le RLC série :

$$\underline{U}_0 = \frac{RI_0}{1 + \frac{R}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}RC\omega}$$

$$\boxed{\underline{U}_0 = \frac{RI_0}{1 + \mathrm{j}R\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}.}$$

**3 -** On a $U = |\underline{U}_0| = \dfrac{RI_0}{\sqrt{1 + R^2\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}$.

Il faut chercher le maximum. Il est atteint lorsque le dénominateur est minimum (car pas de $\omega$ au numérateur). C'est ici assez simple : c'est lorsque $\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2 = 0$, donc pour $\boxed{\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}.}$

C'est donc cette pulsation là qu'il faut utiliser.

**4 -** On définit $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $x = \omega : \omega_0$. On a alors

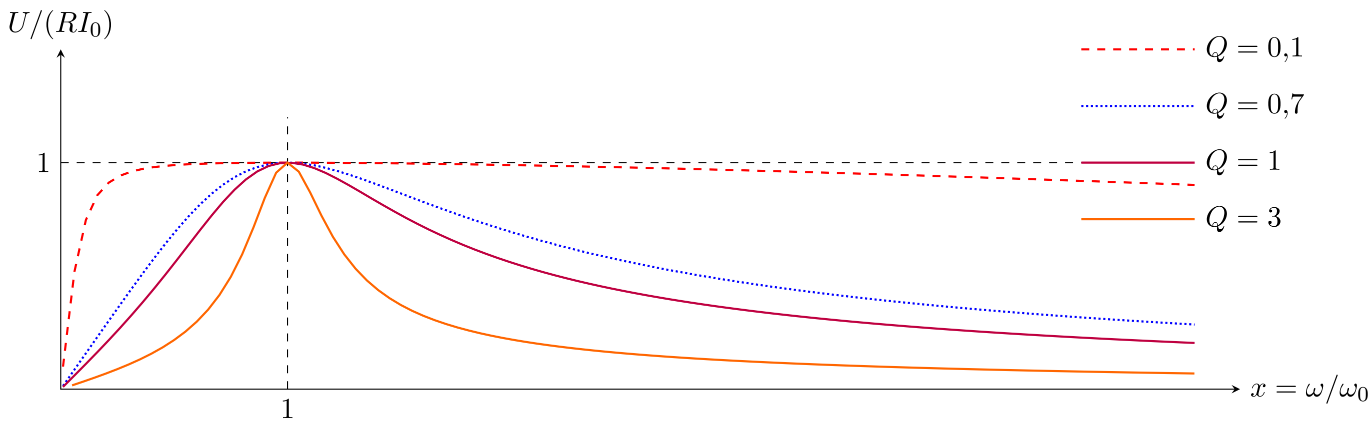
$$\begin{aligned} C\omega - \frac{1}{L\omega} &= \frac{C\sqrt{L}\omega}{\sqrt{L}} - \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C}L\omega} \\ &= \frac{\sqrt{C}\sqrt{C}\sqrt{L}\omega}{\sqrt{L}} - \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C}\sqrt{L}\sqrt{L}\omega} \\ &= \frac{\sqrt{C}\omega}{\sqrt{L}\omega_0} - \frac{\sqrt{C}\omega_0}{\sqrt{L}\omega} \\ &= \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{L}}\left(x - \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

D'où

$$\underline{U}_0 = \frac{RI_0}{1 + \mathrm{j}R\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{L}}\left(x - \frac{1}{x}\right)}.$$

On pose $Q = R\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{L}}$. On a

$$U = \frac{RI_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}.$$




**5 -** Il faut trouver l'expression des pulsations de coupures $\omega_{c1}$ et $\omega_{c2}$.

On note $x_1 = \omega_{c1}/\omega_0$ et $x_2 = \omega_{c2}/\omega_0$ les pulsations réduites correspondantes.

Elles sont solutions de $U(x) = \dfrac{U_{\max}}{\sqrt{2}} = \dfrac{RI_0}{\sqrt{2}}$.

Ceci est équivalent à $Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 = 1$, soit tous calculs faits et en éliminant les solutions négatives, pour

$$x_1 = -\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}}, \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}}.$$

La largeur de la bande passante est $\Delta x = x_2 - x_1 = \dfrac{1}{Q}$, soit encore $\boxed{\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}.}$

**Remarque :** On a $\varphi = \pm\pi/4$ pour $x_1$ et $x_2$.

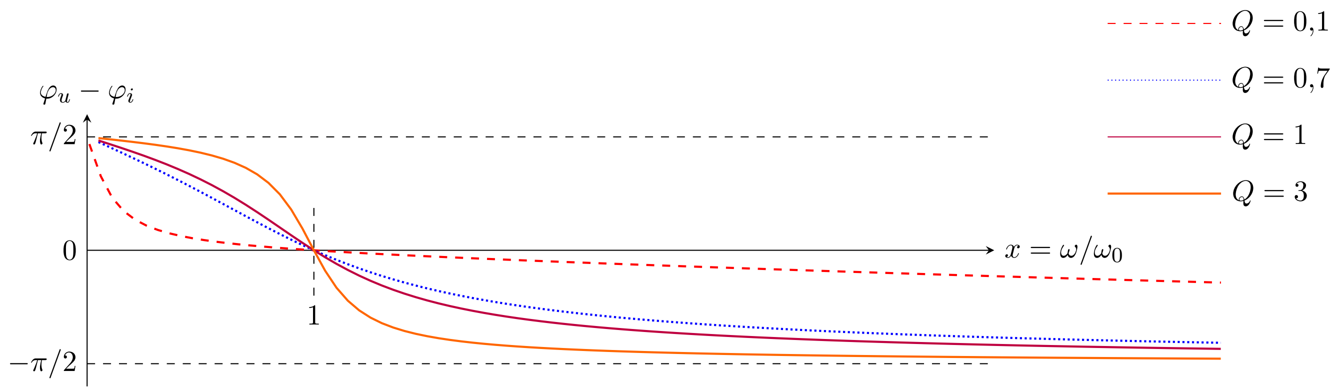
On a $\boxed{A_c = Q = R\dfrac{\sqrt{C}}{\sqrt{L}} = 5{,}2.}$

L'acuité augmente avec la résistance. C'est normal car la résistance est en parallèle avec le reste du circuit, donc une absence de résistance signifie ici une résistance $R$ infinie (pour qu'aucun courant ne la traverse).

**6 -** Le déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$ est donné par l'argument de $\underline{U}_0$.

En effet, $\varphi_u - \varphi_i = \varphi_u$ car $\varphi_i = 0$, et $\varphi_u = \arg(\underline{U}_0)$.

$$\boxed{\varphi = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right).}$$




**Remarque :** le déphasage $\varphi$ est nul à la résonance. $u(t)$ et $i(t)$ sont en phase.