

Régime sinusoïdal forcé

I Introduction

1 - Qu'est ce que le régime sinusoïdal forcé ?

Forçage harmonique
 $e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_e) \rightarrow \boxed{\phantom{\text{Système}}}$ $\rightarrow s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi_s)$
 système linéaire invariant
 Intérêt : tout signal est somme de signaux harmoniques

2 - Passage régime transitoire \rightarrow RSF

$x_H(t) + x_p(t)$ \rightarrow $x_p(t)$
 nulle après qq \mathcal{T}

II Représentation complexe d'un signal

1 - Définitions

$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \underline{x}(t) = X_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$
 $= \underline{X}_0 e^{j\omega t}$
 amplitude complexe $\underline{X}_0 = X_0 e^{j\varphi}$

2 - Propriétés

- Somme des amplitudes complexes
- Dérivation $\times j\omega$
- Intégration $\times 1/j\omega$

III Circuits électriques en RSF

1 - Impédances complexes $\underline{Z} = \underline{u}/\underline{i} = \underline{U}_0/\underline{I}_0$

- module, argument, déphasage de u et i
- cas de R, L et C
- limites basses et hautes fréquences
- associations // ou série

+

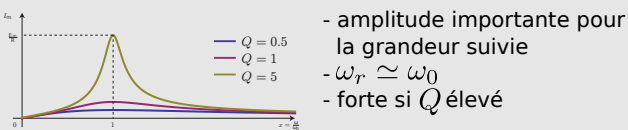
2 - Lois de Kirchhoff \rightarrow valables en complexes

3 - Exemple

- circuit RL

IV Étude de la résonance d'un oscillateur forcé

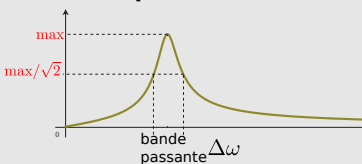
1 - Le phénomène de résonance



2 - Exemples en électronique et mécanique

- circuit RLC série forcé : $i(t)$ ou $u_C(t)$
 - masse-ressort forcé : $v(t)$ ou $x(t)$
- \rightarrow cf exercices

3 - Bande passante et acuité



4 - Étude détaillée : RLC série, intensité

Ce qu'il faut connaître

_____ (cours : I)

- ₁ Si un système linéaire invariant reçoit en entrée une grandeur du type $e_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$, quelle est la forme de la grandeur de sortie ?

_____ (cours : II)

- ₂ Pour un signal complexe harmonique $\underline{x}(t)$ de pulsation ω , comment s'écrit $\dot{\underline{x}}$ en fonction de \underline{x} ? $\ddot{\underline{x}}$? et une primitive de $\underline{x}(t)$?

_____ (cours : III)

- ₃ Comment est définie l'impédance complexe d'un dipôle (en fonction de \underline{u} et \underline{i}) ?

- ₄ Quelle est l'expression de l'impédance complexe d'une résistance? d'un condensateur? d'une bobine? (il faut aussi savoir le redémontrer en partant des lois en notation réelle)

- ₅ À quoi est équivalent un condensateur à basse fréquence et à haute fréquence? Même question pour une bobine.

_____ (cours : IV)

- ₆ Comment décrire rapidement ce qu'est un phénomène de résonance ?

Ce qu'il faut savoir faire

_____ (cours : I)

- ₇ Repérer le régime transitoire et le régime permanent (sinusoïdal forcé) sur un relevé temporel. \rightarrow figure page ??

_____ (cours : II)

- ▶₈ Associer à un signal réel harmonique $x(t)$ son signal complexe $\underline{x}(t)$. Faire apparaître l'amplitude complexe. Savoir en déduire l'amplitude et la phase à l'origine. → **EC1**
 _____ (cours : III)
- ▶₉ Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente. → **EC2**
- ▶₁₀ Utiliser le formalisme complexe pour l'étude d'un circuit en RSF :
 - Trouver le comportement équivalent d'un circuit à haute et basse fréquence. → **EC3**
 - Obtenir la solution complexe en régime sinusoïdal forcé pour un circuit électrique simple. → **EC4**
 - Obtenir la solution réelle à partir de la solution complexe. → **EC4**
 - Cf aussi IV du cours.
- ▶₁₁ Passer de l'équation différentielle sur les grandeurs réelles à une relation entre les grandeurs complexes. → **EC5**
 _____ (cours : IV)
- ▶₁₂ Utiliser le formalisme complexe pour l'étude d'un circuit en RSF et identifier une résonance → **EC6**
 - Exemples à savoir traiter : résonance en intensité du circuit RLC série (EC6 et 7), résonance en tension du circuit RLC série (TD II), résonance en élongation de l'oscillateur masse-ressort (TD III).
- ▶₁₃ Relier l'acuité d'une résonance forte au facteur de qualité Q . **EC7**
- ▶₁₄ Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux. → **TD IV, TP 14**

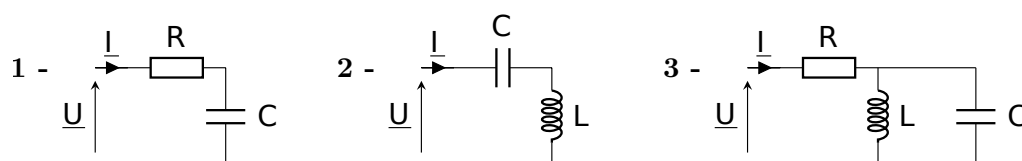
Exercices de cours

Exercice C1 – Associer à un signal réel harmonique $x(t)$ son signal complexe $\underline{x}(t)$ et vice-versa

- 1 - Donner le signal complexe associé à chacun des signaux suivants ($u_0 > 0$), et donner l'expression de l'amplitude complexe : **(a)** $u(t) = u_0 \cos(\omega t - \pi/4)$, **(b)** $u(t) = -u_0 \cos(\omega t)$, **(c)** $u(t) = u_0 \sin(\omega t)$,
- 2 - Dans le cas (b), que vaut la phase à l'origine et l'amplitude du signal ?
- 3 - Dans l'autre sens maintenant : on considère les amplitudes complexes suivantes, donner à chaque fois l'expression du signal réel associé. **(a)** $\underline{U}_0 = u_0 e^{j\pi/3}$, **(b)** $\underline{U}_0 = u_0 j e^{j\pi/4}$, **(c)** $\underline{U}_0 = -u_0 e^{j\pi/4}$.

Exercice C2 – Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente

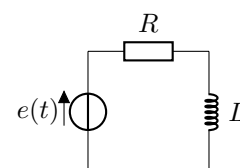
Donner l'expression de l'impédance équivalente à chaque association de dipôles.



Exercice C3 – Trouver le comportement équivalent d'un circuit à haute et basse fréquence

On considère le circuit ci-contre. On se place en RSF : $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.

- 1 - Déterminer la valeur du courant $i(t)$ dans le circuit lorsque $\omega \rightarrow 0$, et lorsque $\omega \rightarrow +\infty$.



Exercice C4 – Obtenir la solution complexe en régime sinusoïdal forcé pour un circuit électrique simple.

On considère à nouveau un circuit RL série alimenté par une tension $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.

- 1 - Quel est le signal complexe associé à $e(t)$? Comment s'exprime son amplitude complexe?
- 2 - On cherche $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Comment s'écrit la grandeur complexe associée? Et l'amplitude complexe?
- 3 - En étudiant le circuit, trouver l'expression de l'amplitude complexe de $i(t)$ en fonction de E_0 , R , L , et ω .
- 4 - Soit le signal complexe $\underline{i}(t) = \frac{E_0 e^{j\omega t}}{R + jL\omega}$ trouvé précédemment. Donner l'expression du signal réel associé, en particulier on calculera son amplitude et de sa phase à l'origine.
- 5 - Tracer en fonction de t le signal $i(t)$ et le signal d'entrée $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.

Variante : le faire avec un circuit RC série.

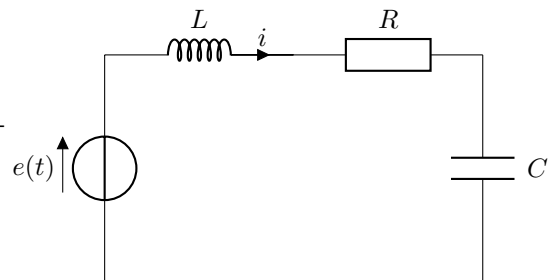
Exercice C5 – Passer de l'équation différentielle sur les grandeurs réelles à une relation entre les grandeurs complexes

On considère à nouveau un circuit RL série alimenté par une tension $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$. On peut montrer que l'équation différentielle suivie par le courant $i(t)$ est $e(t) = L \frac{di}{dt} + Ri$.

- 1 - En déduire l'expression de l'amplitude complexe \underline{I}_0 de $i(t)$ en fonction de E_0 , R , L , et ω .

Exercice C6 – Résonance en intensité dans le circuit RLC série

On considère un circuit RLC série, alimenté par un générateur idéal délivrant une tension $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$. On s'intéresse ici au courant $i(t)$.



- 1 - Par une étude asymptotique, donner la valeur du courant pour $\omega \simeq 0$, puis pour $\omega \rightarrow \infty$.
- 2 - On cherche $i(t)$ sous la forme $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$.
Par quelle expression complexe ce signal est-il représenté?
- 3 - Donner l'expression de l'impédance complexe \underline{Z} du circuit.
- 4 - Donner l'expression de l'amplitude complexe \underline{I}_0 de i en fonction de R , L , C , E_0 et ω .

Écrire ensuite cette expression sous la forme canonique $\underline{I}_0 = \frac{E_0/R}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$, en introduisant la pulsation propre

ω_0 , le facteur de qualité Q , et la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$.

On donnera les expressions de ω_0 et de Q en fonction de R , L et C .

- 5 - En déduire l'expression de l'amplitude I_0 du courant en fonction de x . Tracer l'allure de la courbe $I_0 = f(x)$.
Pour quelle pulsation la résonance en intensité a-t-elle lieu?

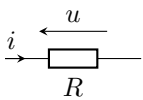
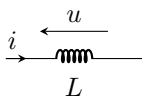
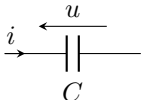
Exercice C7 – Étude des caractéristiques d'une résonance

On reprend l'étude de l'EC précédent. On a montré que l'amplitude complexe de la grandeur d'intérêt est $\underline{I}_0 = \frac{E_0/R}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x}\right)}$.

- En déduire l'expression de la différence de phase φ entre l'intensité et la tension d'alimentation en fonction de x .
Donner l'allure de la courbe en déterminant la valeur de φ en hautes fréquences, en basses fréquences et à la résonance.
- La bande passante $\Delta\omega$ est définie comme $|\omega_{c1} - \omega_{c2}|$, ces pulsations étant les pulsations de coupures, pour lesquelles l'amplitude est divisée par $\sqrt{2}$ par rapport à sa valeur maximale. Établir l'expression de $\Delta\omega$ en fonction de ω_0 et Q .
Comment varie-t-elle lorsque Q augmente ?
- L'acuité de la résonance est définie comme $A_c = \frac{\omega_r}{\Delta\omega}$, avec ω_r la pulsation à la résonance.
Donner son expression en fonction du facteur de qualité. Quelle est l'influence du facteur de qualité sur l'acuité de la résonance en intensité ?
Représenter I_0 en fonction de la pulsation pour différentes valeurs de Q .

Méthodes et outils

Récapitulatif sur les dipôles

Propriété	Résistance	Bobine	Condensateur
Symbole normalisé			
Loi de comportement	$u = Ri$	$u = L \frac{di}{dt}$	$i = C \frac{du}{dt}$ $q = Cu$
Loi de comportement en représentation complexe	$\underline{U} = R\underline{I}$	$\underline{U} = jL\omega\underline{I}$	$\underline{U} = \frac{1}{jC\omega}\underline{I}$
Impédance complexe $\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I}$ en RSF	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_L = jL\omega$	$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$
Dipôle équivalent en basses fréquences ($\omega \sim 0$)	Résistance R	Fil	Interrupteur ouvert
Dipôle équivalent en hautes fréquences ($\omega \rightarrow +\infty$)	Résistance R	Interrupteur ouvert	Fil
Puissance reçue $P = ui$	$P = Ri^2 = u^2/R$		
Énergie stockée	aucune	$E = \frac{1}{2}Li^2$	$E = \frac{1}{2}Cu^2$
Grandeur physique nécessairement continue	aucune	i	u

Relations utiles

$e^{j\pi} = -1$	$e^{j\pi/2} = j$
$\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$	$\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$
$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$	

I – Introduction

1 – Qu'est-ce que le régime sinusoïdal forcé ?

a/ Régime sinusoïdal forcé

Définition : Régime sinusoïdal forcé (RSF)

Un système est en régime sinusoïdal forcé lorsque son entrée $e(t)$ est imposée ("forcée"), et du type sinusoïdal :

$$e(t) = e_0 \cos(\omega t + \varphi_e).$$

Deux exemples : circuit RLC, masse-ressort.

b/ Systèmes linéaires invariants

Définition : Système linéaire invariant (SLI)

- ▶ Un **système linéaire** est un système dont l'évolution est décrite par une ou plusieurs équations différentielles **linéaires**.
- ▶ On se restreint aux systèmes linéaires **invariants**, pour lesquels les coefficients de l'équation différentielle sont constants.
- ▶ L'**ordre** du système est donné par l'ordre de l'équation différentielle qui décrit l'évolution de la grandeur étudiée.

Soit $e(t)$ un signal d'entrée, et $s(t)$ le signal de sortie associé. On note ceci : $e(t) \xrightarrow{\text{sys}} s(t)$.

Propriétés des SLI

- ▶ **Linéarité** : Si on a $e_1(t) \xrightarrow{\text{sys}} s_1(t)$ et $e_2(t) \xrightarrow{\text{sys}} s_2(t)$, alors on aura aussi : $e_1(t) + e_2(t) \xrightarrow{\text{sys}} s_1(t) + s_2(t)$, et on aura pour tout réel k : $k e_1(t) \xrightarrow{\text{sys}} k s_1(t)$.
- ▶ **Invariance** : Si lors d'une expérience on a $e_1(t) \xrightarrow{\text{sys}} s_1(t)$, alors on aura encore $e_1(t) \xrightarrow{\text{sys}} s_1(t)$ si l'on vient refaire l'expérience plus tard.

↪₁ Les circuits électroniques composés de résistances, de bobines et de condensateurs sont linéaires. À votre avis, pourquoi ?

↪₂ Quel exemple de composant peut faire qu'un système électronique n'est pas linéaire ?

↪₃ Qu'est-ce qui peut faire qu'un circuit électronique ne constitue pas un système invariant dans le temps ?

c/ Propriété fondamentale

Propriété des SLI en RSF

Si le signal d'entrée est sinusoïdal alors le signal de sortie l'est également, **avec la même pulsation** :

$$e(t) = e_0 \cos(\omega t + \varphi_e) \xrightarrow{\text{sys}} s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi_s). \quad (1)$$

⇒ La pulsation de sortie est la même que celle d'entrée. Mais l'amplitude s_0 et la phase à l'origine φ_s sont différentes.

⇒ L'objectif de ce chapitre est d'étudier les outils qui permettent de déterminer s_0 et φ_s .

Remarque : Cette propriété provient essentiellement du fait que lorsque l'on dérive ou intègre une fonction cos, on trouve une fonction – sin de même pulsation (donc un cosinus puisque $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$), donc on ne change pas de type de fonction par dérivation ou intégration.

d/ Intérêt de l'étude de la réponse à une excitation harmonique

Rappel : Chapitre signal et spectre, partie III, tout signal se décompose comme une somme de signaux harmoniques, l'amplitude et la phase à l'origine de chaque harmonique étant donnée par le **spectre** du signal.

Par linéarité on a donc :

$$e(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \xrightarrow{\text{sys}} s(t) = c'_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c'_n \cos(n\omega_0 t + \varphi'_n). \quad (2)$$

(c'est le cas d'un signal périodique, pour un signal quelconque la somme devient une intégrale)

⇒ Ce chapitre permettra donc de savoir quelles harmoniques sont amplifiées, atténuées, déphasées... en passant par le système.

2 – Passage du régime transitoire au régime sinusoïdal forcé

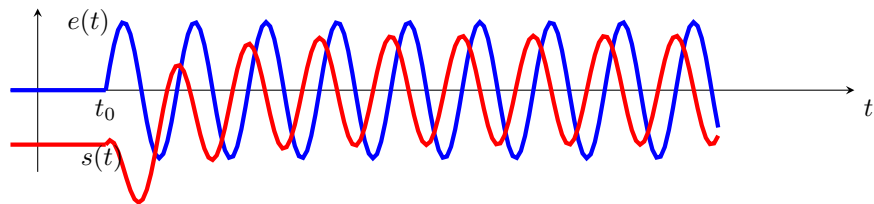
Le critère porte sur la sortie $s(t)$. ▶ **Régime permanent :** lorsque la sortie d'un système a atteint une valeur constante, ou lorsque qu'elle a atteint un régime périodique.

▶ **Régime transitoire :** lorsque la sortie d'un système évolue, pendant un certain temps, entre deux régimes permanents.

Le critère porte sur l'entrée $e(t)$. ▶ **Régime forcé :** lorsque l'entrée du système est maintenue à une valeur non nulle. Cette valeur peut être constante, peut être harmonique (on parle alors de régime sinusoïdal forcé, RSF), ou peut être une fonction périodique (un créneau par exemple).

▶ **Régime libre :** lorsque le système n'est alimenté par aucune source d'énergie. Donc lorsque l'entrée du système est nulle ou devient nulle : $e(t) = 0$.

~4 Mettre en évidence les régimes permanent, transitoire, libre ou forcé.



⇒ Mathématiquement :

- ▷ le régime transitoire correspond à la solution homogène $s_H(t)$, qui décroît exponentiellement ;
- ▷ le régime permanent à la solution particulière $s_p(t)$ qui, en RSF, est du type sinusoïdale.

⇒ Dans ce chapitre, nous supposons que le régime transitoire est terminé et nous étudions uniquement le régime permanent sinusoïdal. Nous ne nous intéressons donc pas aux conditions initiales.

II – Représentation complexe d'un signal

1 – Définitions

Représentation complexe

Notation : les grandeurs complexes sont soulignées.

★ Module et argument

► Module de l'amplitude complexe :

► Argument de l'amplitude complexe :

⇒ l'amplitude complexe \underline{X}_0 contient toute l'information sur le signal.

★ Lien avec le signal réel

Le signal complexe "n'existe pas", c'est un outil.

Sa partie réelle redonne $x(t)$:

2 – Propriétés

Attention : on étudie des signaux **synchrones**, c'est-à-dire qui ont tous la **même pulsation** ω .

► **Les amplitudes complexes s'ajoutent** :

$x_1(t) = X_{10} \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $x_2(t) = X_{20} \cos(\omega t + \varphi_2)$ ont pour amplitudes complexes :

Alors $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ a pour amplitude complexe :

On peut en déduire son amplitude et sa phase à l'origine :

► **Dérivation par rapport au temps** : dériver revient à multiplier par $j\omega$.

► **Intégration par rapport au temps** : intégrer revient à diviser par $j\omega$.

Exemple : avec la loi de comportement d'une inductance :

III – Circuits électriques en RSF

1 – Impédance complexe des dipôles

a/ Définition et loi d'Ohm généralisée

Soit un dipôle en convention récepteur.

$$\begin{cases} u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u) \\ i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) \end{cases} \xrightarrow[\text{complexe}]{\text{représentation}}$$

Définition : impédance complexe \underline{Z} d'un dipôle

Propriétés

On a donc : $\underline{Z} = \frac{U_0}{I_0} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$.

Ainsi :

- ▶ Le module donne le rapport des amplitudes :
- ▶ L'argument donne le déphasage de $u(t)$ par rapport à $i(t)$:

On a la **loi d'Ohm généralisée**, pour tout dipôle :

Remarque :

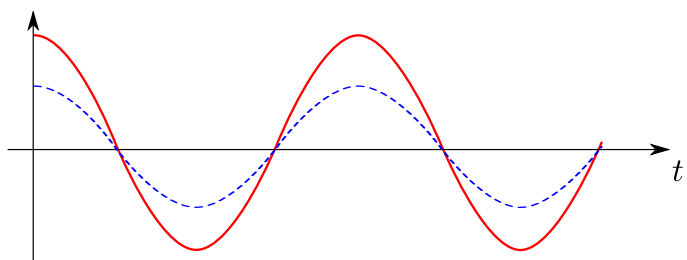
- ▶ On peut décomposer $\underline{Z} = R + jX$.
 - La partie réelle R donne la résistance du dipôle. Positive pour un dipôle passif.
 - La partie imaginaire X est appelée la réactance. $Y > 0 \Rightarrow$ dipôle inductif ; $Y < 0 \Rightarrow$ dipôle capacitif.
- ▶ On définit $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$ l'admittance complexe du dipôle. Unité : Ω^{-1} ou siemens ($1 \text{ S} = 1 \Omega^{-1}$).

b/ Exemples : résistance, inductance, capacité

★ Résistance

\rightsquigarrow_5 Écrire la loi de comportement entre grandeurs réelles. En déduire celle entre grandeurs complexes, puis l'expression de l'impédance.

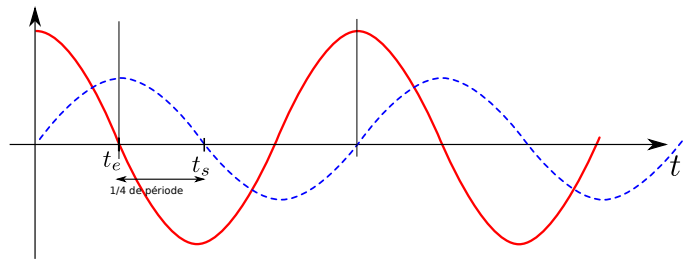
\rightsquigarrow_6 \underline{Z} est réel, quelle conséquence sur le déphasage? Identifier les courbes ci-contre.



★ Inductance

↪₇ Écrire la loi de comportement entre grandeurs réelles. En déduire celle entre grandeurs complexes, puis l'expression de l'impédance.

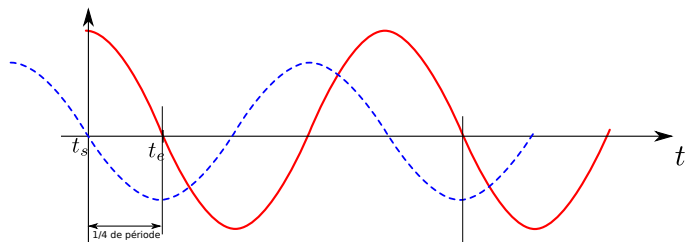
↪₈ Que vaut l'argument de \underline{Z} ? Qu'en déduire sur le déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$? Identifier les courbes ci-contre.



★ Capacité

↪₉ Écrire la loi de comportement entre grandeurs réelles. En déduire celle entre grandeurs complexes, puis l'expression de l'impédance.

↪₁₀ Que vaut l'argument de \underline{Z} ? Qu'en déduire sur le déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$? Identifier les courbes ci-contre.



c/ Comportements en basses et hautes fréquences

Hautes fréquences signifie que $\omega \rightarrow +\infty$.

Basses fréquences signifie que $\omega \rightarrow 0$. Le régime permanent continu en est un cas particulier, puisqu'alors $\omega = 0$.

★ Bobine

↪₁₁ Écrire l'expression de l'impédance complexe. Prendre la limite lorsque $\omega \rightarrow 0$ ou $+\infty$. En déduire le dipôle équivalent.

► Basses fréquences :

► Hautes fréquences :

★ Condensateur

↪₁₂ Écrire l'expression de l'impédance complexe. Prendre la limite lorsque $\omega \rightarrow 0$ ou $+\infty$. En déduire le dipôle équivalent.

► Basses fréquences :

- ▶ Hautes fréquences :

2 – Lois de Kirchhoff généralisées

a/ Associations de dipôles linéaires

La loi d'Ohm $\underline{u} = \underline{Z}i$ fait que les résultats vus pour les associations de résistances se généralisent aux associations d'impédances :

- ▶ Association série :

- ▶ Association parallèle :

Cas particuliers :

- ▶ Des inductances en série s'ajoutent :

- ▶ Des capacités en parallèle s'ajoutent :

↔₁₃ **EC2**

b/ Lois générales pour les circuits linéaires en RSF

La loi des mailles et la loi des nœuds sont encore valable en RSF entre les grandeurs complexes, ou entre les amplitudes complexes.

Les relations comme les diviseurs de tension et de courant sont donc aussi valables.

3 – Exemple d'étude de circuit

Savoir mener une étude en régime asymptotique ↔₁₄ **EC3**

Savoir obtenir la solution complexe en utilisant les impédances complexes ↔₁₅ **EC4**

Autre méthode : obtenir la solution complexe en passant par l'équation différentielle en notations réelles ↔₁₆ **EC5**

IV – Étude de la résonance d'un oscillateur forcé

1 – Le phénomène de résonance

Définition : Résonance

Soit un système dont l'entrée est forcée par un signal harmonique de pulsation ω . Il est possible que, pour certaines valeurs de ω , une des grandeurs du système **oscille avec une amplitude très importante**.

On dit alors qu'il y a résonance. La pulsation correspondante est la pulsation de résonance ω_r .

Mathématiquement, on parlera de résonance lorsque l'amplitude de la grandeur étudiée $U(\omega)$ possède un maximum local (autre qu'en $\omega = 0$).

Propriétés

Pour une situation donnée, il faudra distinguer **trois pulsations** :

- ▶ **La pulsation propre** du système, ω_0 .
C'est la pulsation à laquelle il oscille s'il est abandonné sans contrainte.
Par exemple pour le système masse-ressort : $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, ou pour le circuit RLC : $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.
- ▶ **La pulsation du forçage**, ω , à laquelle on force le système à évoluer.
- ▶ L'éventuelle **pulsation de résonance**, ω_r , qui correspond à une pulsation de forçage pour laquelle la réponse est forte.

En général, la résonance a lieu lorsque le système est forcé à sa pulsation propre ou presque : $\omega_r \simeq \omega_0$.

Elle est d'autant plus forte que le facteur de qualité est grand.

L'**idée physique de la résonance** est que lorsqu'on force le système à sa fréquence propre, l'énergie qu'on lui transmet est toujours apportée en phase, et augmente sans cesse.

Exemple : Lorsque l'on fait de la balançoire, on pousse toujours au bon moment pour que l'amplitude des oscillations augmente.

Il y a ensuite des mécanismes qui modèrent cette augmentation : non-linéarités ou phénomènes de dissipation.

Ainsi, une résonance sera d'autant plus forte que le facteur de qualité du système sera grand (peu de dissipation).

Des exemples de phénomènes de résonance :

- ▶ La caisse de résonance d'un instrument de musique est - comme son nom l'indique - conçue pour que l'amplitude de l'onde sonore soit très importante en sortie.
- ▶ Une montre à quartz exploite les vibrations d'un cristal de quartz à une fréquence bien précise, sa fréquence de résonance, afin d'en compter les oscillations et de tenir le temps.
- ▶ L'amplitude importante des oscillations peut endommager le système, que ce soit une tension électrique trop importante ou des vibrations mécaniques trop importantes. Voiture ou vélo sur une route oscillant régulièrement, marcheurs sur un pont, vibrations provoquées par un séisme : si la fréquence de ces excitations coïncide avec celle de résonance du système, il peut y avoir destruction.
- ▶ Les marées sont aussi d'amplitude plus ou moins forte en fonction de résonances entre le forçage (Soleil et Lune, période de $\simeq 24$ h), et la période propre des oscillations de l'eau au lieu considéré.

2 – Exemples en électronique et en mécanique

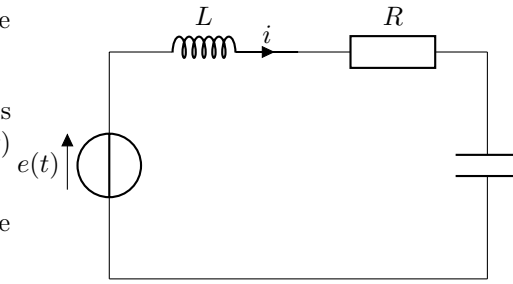
Remarque : Rien n'est à connaître par cœur dans ces exemples, mais les avoir déjà rencontrés vous permettra de mieux comprendre les exercices. Par ailleurs, nous n'effectuons pas de démonstration ici. Elles seront faites dans les exercices de cours ou de TD.

a/ Électronique : circuit RLC

On considère un circuit RLC série, alimenté par un générateur idéal délivrant une tension $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.

On peut s'intéresser à plusieurs grandeurs : l'intensité $i(t)$, la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur, celle aux bornes de la bobine, ou encore à la puissance $i(t) \times u_C(t)$ reçue par le condensateur.

Certains cas donnent les mêmes équations, et il y a en fait seulement deux types de résonances, que nous présentons ci-dessous.



a.1/ Résonance en intensité (cours IV)

★ La grandeur d'intérêt est ici l'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

★ On peut montrer que son amplitude complexe s'écrit sous une forme canonique :

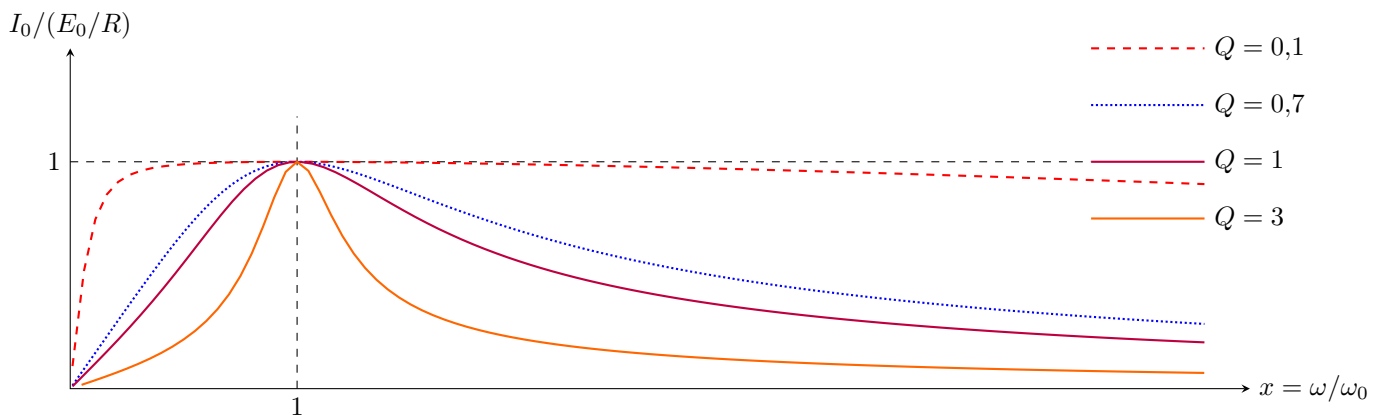
$$\underline{I}_0 = \frac{E_0/R}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Enfin, en définissant la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$, on arrive à l'expression $\underline{I}_0 = \frac{E_0/R}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$.

★ L'amplitude (réelle) du courant est donc

$$I_0 = |\underline{I}_0| = \frac{E_0/R}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}.$$

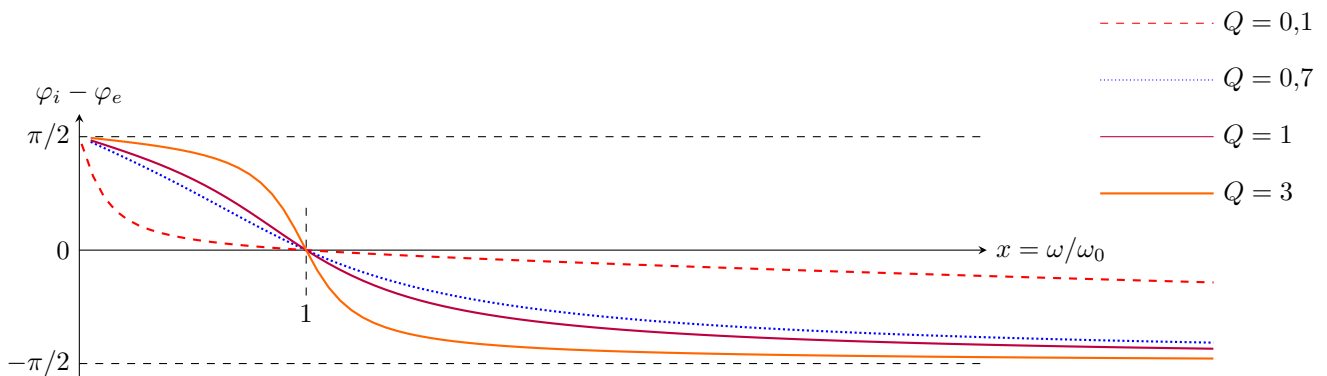
Et la résonance en intensité a lieu si I_0 est maximal, donc en $x = 1$, donc pour $\omega = \omega_0$.



Remarque : La résonance a toujours lieu, en $\omega_r = \omega_0$.

★ Concernant la phase, on montre que

$$\varphi = \varphi_i - \varphi_e = -\arctan \left(Q \left(x - \frac{1}{x} \right) \right).$$



Remarque : le déphasage φ est nul à la résonance. $i(t)$ et $e(t)$ sont en phase.

a.2/ Résonance en tension (u_C) (TD II)

★ La grandeur d'intérêt est ici la tension $u_C(t) = U_{C0} \cos(\omega t + \varphi)$.

★ On peut montrer que son amplitude complexe s'écrit sous une forme canonique :

$$\underline{U}_{C0} = \frac{E_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}, \quad \text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{et } x = \omega/\omega_0.$$

★ L'amplitude (réelle) de la tension est donc

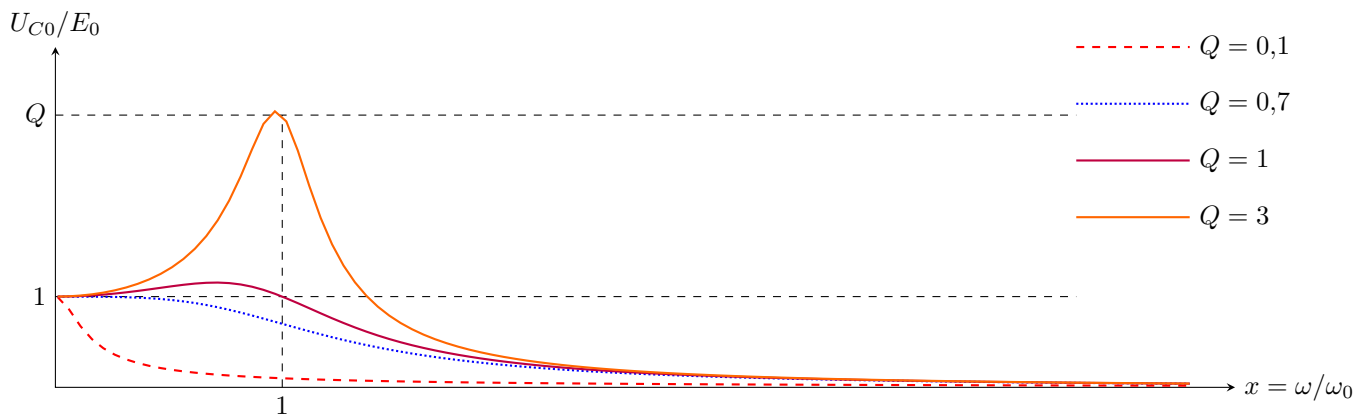
$$U_{C0} = |\underline{U}_{C0}| = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}.$$

Il y a résonance si $U_{Cm}(x)$ admet un maximum pour une valeur de $x \in]0, +\infty[$. Le numérateur ne dépendant pas de x , ceci est équivalent au fait que le dénominateur admette un minimum. On regarde donc si la dérivée de $(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$ s'annule.

On trouve que c'est toujours le cas en $x = 0$ (c'est alors un maximum ou un minimum, mais ce n'est jamais la résonance car c'est en 0), et qu'il y a une seconde possibilité en $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$, mais seulement si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

La résonance a donc lieu seulement si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,7$, à la pulsation de résonance $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

On a l'allure suivante :

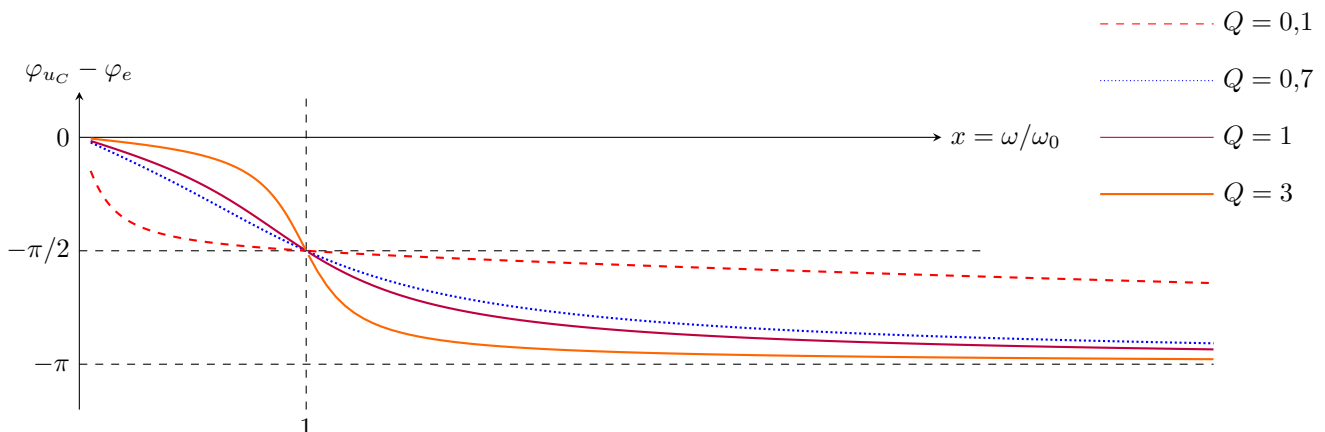


Remarque : à la pulsation propre (ω_0), l'amplitude vaut Q fois l'amplitude en $x = 0$; et ici $\omega_r \neq \omega_0$, mais il y a presque égalité pour Q élevé.

★ Concernant la phase, on montre que

$$\varphi = \varphi_{u_C} - \varphi_e = \arctan \frac{Q(1 - x^2)}{x} - \frac{\pi}{2}$$

On a l'allure suivante :



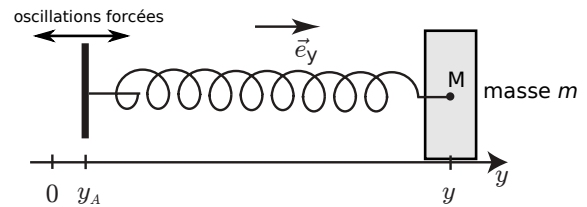
Remarque : le déphasage φ vaut $-\frac{\pi}{2}$ à la pulsation propre ω_0 : $u_C(t)$ et $e(t)$ sont alors en quadrature, avec $u_C(t)$ en retard sur $e(t)$.

b/ Mécanique : système masse-ressort (TD III)

On considère une masse m attachée à un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k . La masse glisse sur un plan horizontal. On prend en compte les frottements via une force de frottement $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$, avec $\lambda > 0$ une constante.

L'extrémité gauche du ressort est forcée par un mouvement d'oscillation (par un système bielle-manivelle par exemple) selon $y_A(t) = A \cos(\omega t)$.

On peut considérer pour simplifier que $l_0 = 0$.



a.1/ Résonance en vitesse ($\dot{y}(t)$)

★ La grandeur d'intérêt est ici la vitesse $v(t) = \dot{y}(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

★ On peut montrer que son amplitude complexe s'écrit sous une forme canonique :

$$\underline{V}_0 = \frac{A k / \lambda}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)} \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q = \frac{1}{\lambda} \sqrt{km} \text{ et } x = \omega / \omega_0.$$

→ Il s'agit donc du même cas que pour la résonance en intensité du circuit RLC (cas a.1 ci-dessus).

a.2/ Résonance en élongation ($y(t)$)

★ La grandeur d'intérêt est ici la position $y(t) = Y_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

★ On peut montrer que son amplitude complexe s'écrit sous une forme canonique :

$$\underline{Y}_0 = \frac{A}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}, \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q = \frac{1}{\lambda} \sqrt{km} \text{ et } x = \omega / \omega_0.$$

→ Il s'agit donc du même cas que pour la résonance en tension du circuit RLC (cas a.2 ci-dessus).

3 – Bande passante et acuité de la résonance

Définition : bande passante

La **bande passante** est l'ensemble des pulsations qui ne sont pas trop atténuées.

Les **pulsations de coupures** sont les pulsations qui délimitent la bande passante.

Par convention, ce sont celles pour lesquelles l'amplitude U_0 de la grandeur d'intérêt est égale à l'amplitude maximale divisée par $\sqrt{2}$:

$$\omega_c \text{ est telle que } U_0(\omega_c) = \frac{U_{0\max}}{\sqrt{2}}.$$

Il y a en général deux pulsations de coupures, ω_{c1} et ω_{c2} . La largeur de la bande passante est définie comme $\Delta\omega = |\omega_{c1} - \omega_{c2}|$.

→₁₇ Faire apparaître la bande passante sur la courbe de Q le plus élevé dans les deux exemples vu plus haut.

Définition : acuité d'une résonance

La largeur de la bande passante donne une bonne idée de la largeur de la résonance.

On définit ainsi l'acuité de la résonance comme $A_c = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$.

Si la résonance est assez forte, on a $A_c \simeq Q$. (cf exemple IV et TD)

(cette définition n'est pas à connaître, elle sera rappelée)

Nous verrons en TD que l'étude des tracés d'amplitude et de phase permet de remonter à la pulsation propre et au facteur de qualité du système.

4 – Une étude détaillée : résonance en intensité pour le circuit RLC série

→₁₈ EC6 et EC7.