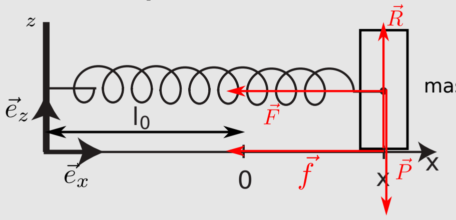
Partie V : Étude des systèmes linéaires
Chapitre 3

Régime transitoire des systèmes du 2$^{\text{nd}}$ ordre

Oscillateurs amortis

I Exemple d'oscillateur amorti : le système masse-ressort avec frottements visqueux

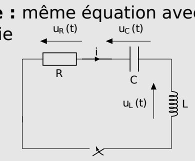
1 - Mise en équation



masse m — équation du type

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha$$

et en remarque : même équation avec le circuit RLC série



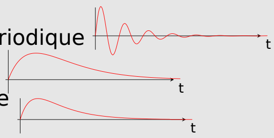
2 - Résolution

discriminant + racines...

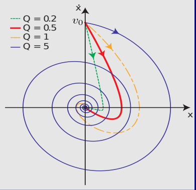
$Q > 1/2$ pseudo-périodique

$Q = 1/2$ critique

$Q < 1/2$ apériodique



3 - Portrait de phase



4 - Un exemple avec d'autres CI

5 - Allure des solutions quand il y a un second membre

II Exemple du circuit RLC série → TD

Ce qu'il faut connaître

(cours : I et II)

▶$_1$ Quelle est l'équation qui caractérise un oscillateur harmonique amorti ? (écrite sous forme canonique : en faisant intervenir la pulsation propre et le facteur de qualité)

▶$_2$ Donner les trois types de régimes transitoires observables pour un oscillateur harmonique amorti en fonction de la valeur du facteur de qualité.

▶$_3$ Tracer pour chacun des régimes précédents l'allure de la réponse en fonction du temps (on prendra par exemple $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 > 0$).

▶$_4$ De même, tracer pour chacun l'allure du portrait de phase.

▶$_5$ Dans quel cas le régime transitoire est-il le plus bref ? Donner alors l'ordre de grandeur de sa durée en fonction de la pulsation propre.

▶$_6$ Quelle est le paramètre qui donne l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations dans le régime transitoire pseudo-périodique ? Quelle est la durée approximative d'une oscillation si Q est assez grand ?

Ce qu'il faut savoir faire

▶$_7$ **Étude d'un système du second ordre en régime transitoire amorti :** → **EC1**, **EC2**, **EC3**, TD I, II, III

- obtenir l'équation du mouvement, l'écrire sous forme canonique pour identifier le facteur de qualité et la pulsation propre,
- la résoudre complètement pour une valeur du facteur de qualité Q donnée (les conditions initiales étant données, par exemple $x(t = 0) = 0$ et $v(t = 0) = v_0$),
- donner l'allure de la solution, et du portrait de phase associé.

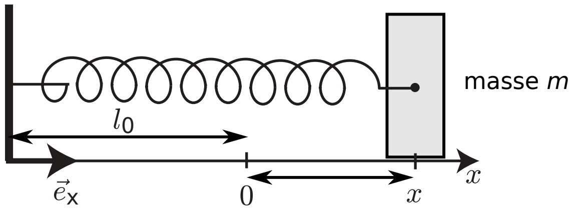
▶$_8$ Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.

▶$_9$ Prévoir l'évolution du système en utilisant un portrait de phase fournit → **EC4**

Exercices de cours

Remarque : Les exercices de cours ci-dessous concernent le système masse-ressort horizontal. Il faut également savoir traiter la même chose pour la décharge du circuit RLC (exercice I du TD) ou sa charge lorsqu'il est soumis à un échelon (exercice II du TD). Le circuit RLC peut donc également être posé en exercice de cours.

Exercice C1 – Aboutir à l'équation du mouvement dans le cas du système masse-ressort avec frottements



On considère le système ci-contre. On se place dans un référentiel terrestre supposé galiléen. Les frottements sont modélisés par une force s'exerçant sur la masse dont l'expression est $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$, $\lambda > 0$ étant une constante. Le ressort est de raideur k et de longueur à vide l_0.

1 - Faire un bilan des forces sur le système {masse}, appliquer le principe fondamental de la dynamique et en déduire l'équation portant sur la position $x(t)$.

2 - Mettre cette équation sous forme canonique, donner alors l'expression du facteur de qualité et de la pulsation propre en fonction de λ, m et k.

Exercice C2 – Résoudre l'équation de l'oscillateur amorti, les CI étant données

On reprend le cas précédent et ses résultats, en particulier l'équation différentielle sur $x(t)$: $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. On se place dans un cas où $Q > 1/2$. On se donne des conditions initiales : à $t = 0$, $x(0) = 0$ et $v(0) = v_0 > 0$.

1 - Résoudre l'équation du mouvement pour obtenir la solution $x(t)$. On déterminera les constantes d'intégration. On tracera l'allure de la solution.

Remarque : Le cas où $Q < 1/2$, et le cas où $Q = 1/2$, ont aussi été traités dans le cours (partie I.2, à la suite du cas $Q > 1/2$). Il faut bien sûr aussi savoir les faire. Si votre cours n'est pas clair, il y a une correction de cet EC sur le site de la classe.

Exercice C3 – Tracer un portrait de phase

On reprend le cas précédent ($Q > 1/2$) et ses résultats : $x(t) = \dfrac{v_0}{\Omega}\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t}$. On se donne des conditions initiales : à $t = 0$, $x(0) = 0$ et $v(0) = v_0 > 0$.

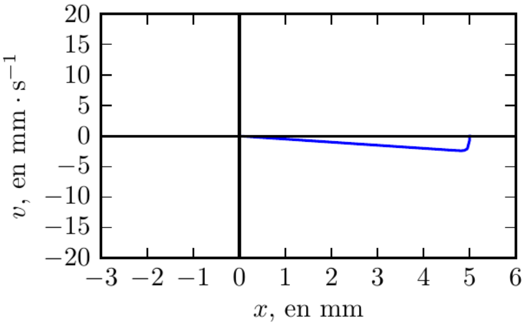
1 - Tracer l'allure du portrait de phase du système.

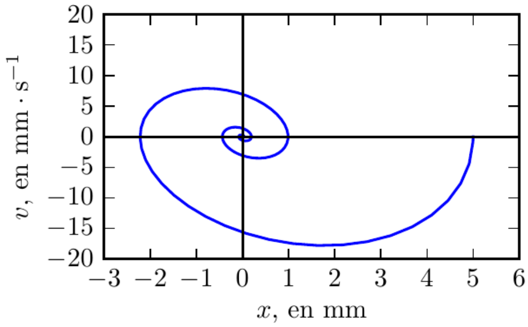
Exercice C4 – Utiliser un portrait de phase

On donne les portraits de phase ci-dessous, tracés pour l'évolution d'une masse oscillant dans deux types de fluides visqueux. Pour chacun :

1 - Donner le sens de parcours. Indiquer de quel type de régime il s'agit (pseudo-périodique, ...).

2 - Tracer l'évolution de $x(t)$ en fonction de t.





Méthodes

Comment obtenir les solutions de l'équation différentielle de l'oscillateur amorti ?

Équation du type $\boxed{\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha}$ avec α une constante.

$\star$ Solution homogène : pour l'obtenir on écrit le polynôme caractéristique $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$. On cherche son discriminant et ses racines.

- Si $Q > 1/2$: $x_{\text{hom}}(t) = (A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)\ \mathrm{e}^{-\mu t}$
  (on écrit les racines du polynôme caractéristique comme $r_\pm = -\mu \pm \mathrm{i}\Omega$)
- Si $Q = 1/2$: $x_{\text{hom}}(t) = (At + B)\ \mathrm{e}^{-\mu t}$ ($-\mu$ est racine double du polynôme caractéristique)
- Si $Q < 1/2$: $x_{\text{hom}}(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$ (r_1 et r_2 sont les racines du polynôme caractéristique)

$\star$ Solution particulière : on la suppose constante, il reste donc $0 + 0 + \omega_0^2 x = \alpha$, d'où $x_{\text{part}} = \dfrac{\alpha}{\omega_0^2}$.

$\star$ Solution $x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{part}}$.

$\star$ On détermine A et B avec les deux conditions initiales.

Trame du cours

I – Exemple d'oscillateur amorti : le système masse-ressort avec frottements

Remarque : **Animations pour le système masse-ressort**
$\star$ Lien vers une vidéo montrant les différents régimes d'amortissement pour l'oscillation d'une masse+ressort : cf site classe.
$\star$ Animation permettant de régler le facteur de qualité, les CI, et de visualiser l'allure et le portrait de phase : cf site classe.

1 – Mise en équation

Sur feuille. Pour réviser : correspond à l'**EC1**.

$\rightarrow$ On arrive à l'équation $\boxed{\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $Q = \sqrt{mk}/\lambda$.

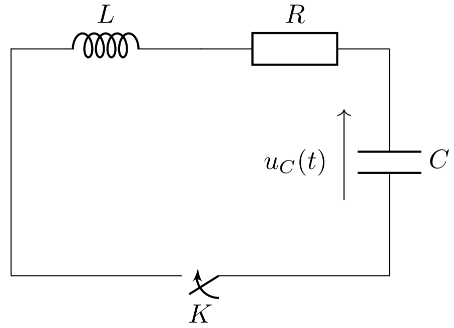
Remarque : **Exemple similaire, le circuit RLC et l'évolution de $q(t)$:**

On étudie le circuit ci-contre, où le condensateur est initialement chargé (charge $q(t = 0) = Q_0$. Pour $t < 0$ le circuit est ouvert. Il est refermé à $t = 0$: le condensateur va se décharger.

1 - Exprimer u_c, u_L et u_R en fonction de la charge $q(t)$ du condensateur.

2 - En déduire l'équation différentielle vérifiée par $q(t)$.

3 - La mettre sous la même forme que pour le système masse-ressort.



2 – Résolution de l'équation

Sur feuille. Pour réviser : correspond à l'**EC2**.

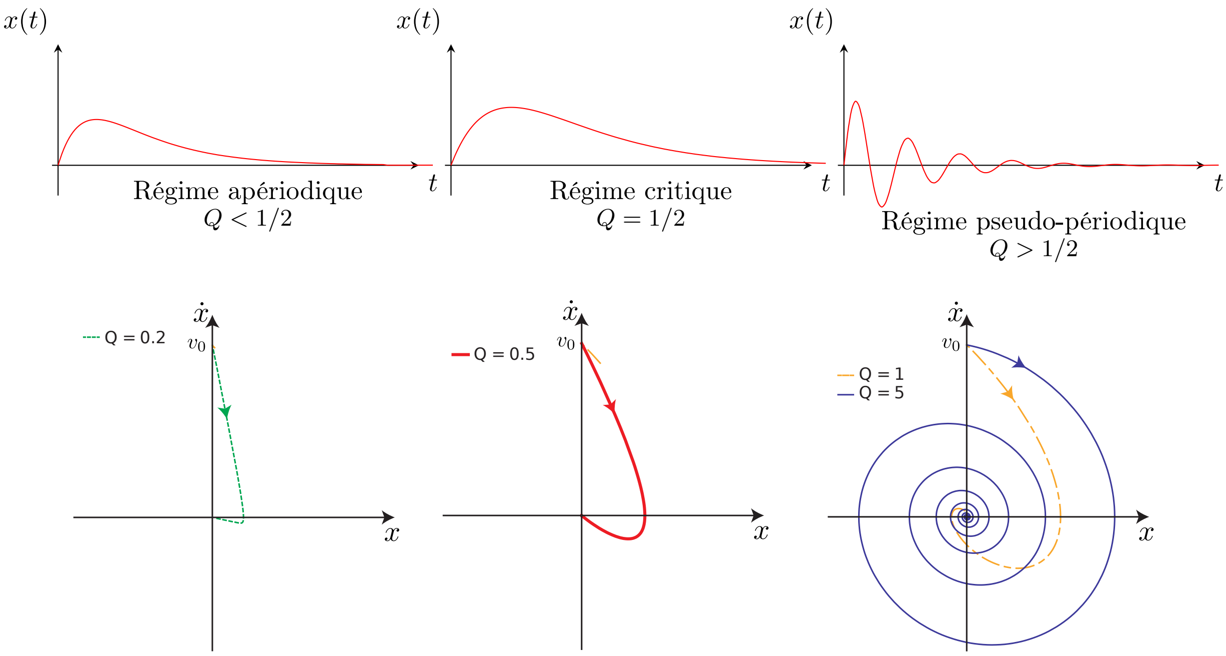
3 – Portrait de phase

Pour réviser : correspond à l'**EC3**.

> **Comment tracer un portrait de phase ?**
>
> ⋆ Repérer la grandeur étudier. Par exemple si c'est $x(t)$, on tracera $\dot{x}(t)$ en fonction de $x(t)$.
>
> ⋆ Déterminer $x(0)$ et $\dot{x}(0)$, et placer le point correspondant sur le diagramme.
>
> ⋆ Déterminer $x(+\infty)$ et $\dot{x}(+\infty)$ si c'est possible, et placer le point correspondant sur le diagramme.
>
> ⋆ Trouver le sens de parcours : c'est toujours le sens horaire car si $\dot{x} > 0$ alors x décroit, et vice-versa.
>
> ⋆ Tracer en réfléchissant...

Ici l'équation est $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$,
et les conditions initiales sont $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 > 0$.

On a donc :



4 – Un exemple avec d'autres CI

a/ Résolution

On reprend le système masse-ressort horizontal, dont l'équation est $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $Q = \sqrt{mk}/\lambda$.

On change les CI : cette fois, $x(0) = x_0 > 0$ **et** $\dot{x}(0) = 0$**.**

Prenons par exemple le cas où $Q > 1/2$.

⋆ On a encore la forme générale des solutions :

$$\boxed{x(t) = (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))\ \mathrm{e}^{-\mu t} + 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\mu = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.}$$

⋆ Utilisation CI1 : $x(0) = x_0$.
D'après la solution, on a $x(0) = A$.
Donc $\boxed{A = x_0.}$

⋆ Utilisation CI2 : $\dot{x}(0) = 0$.
Il faut dériver la solution :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A\cos(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + B\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t}\right)\\ &= -A\Omega\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + A\cos(\Omega t)\,(-\mu)\mathrm{e}^{-\mu t} + B\Omega\cos(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + B\sin(\Omega t)\,(-\mu)\mathrm{e}^{-\mu t}\end{aligned}$$

Donc $\dot{x}(0) = -A\mu + B\Omega$.

Ceci doit être nul, donc on en déduit que $\boxed{B = A\frac{\mu}{\Omega} = x_0\frac{\mu}{\Omega}.}$

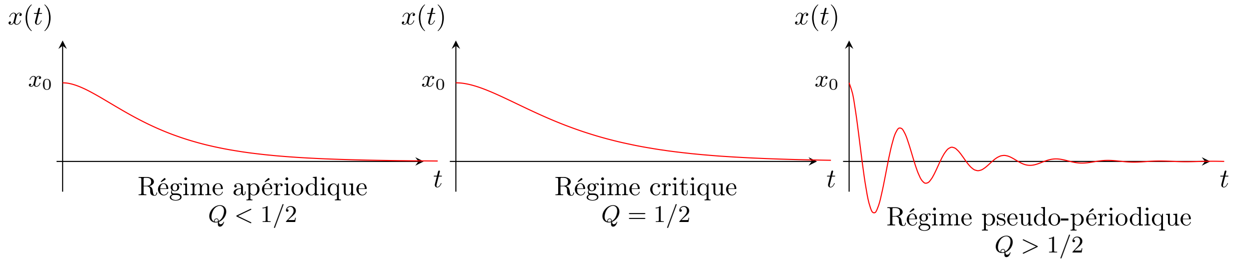
⋆ Finalement on a donc

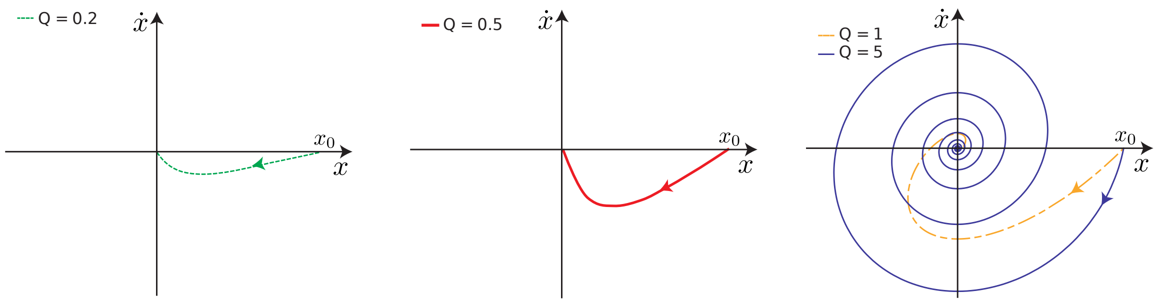
$$\boxed{x(t) = x_0\left(\cos(\Omega t) + \frac{\mu}{\Omega}\sin(\Omega t)\right)\,\mathrm{e}^{-\mu t}.}$$

b/ Tracés

Ici l'équation est $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$,
et les conditions initiales sont $x(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$.

On a donc :





5 – Allure des solutions lorsqu'il y a un second membre

Traçons l'allure des solutions et des portraits de phase lorsqu'il y a un second membre non nul :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 E_0.$$

Ce sera le cas de la charge du circuit RLC (TD II).

Par exemple, conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$. On a (et on pourra tracer les portraits de phase associés !) :