

Régime transitoire des systèmes du 2nd ordre

Oscillateurs amortis

I Exemple d'oscillateur amorti : le système masse-ressort avec frottements visqueux

1 - Système masse-ressort avec frottements

équation du type

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha$$

2 - Résolution
discriminant + racines...

- $Q > 1/2$ pseudo-périodique
- $Q = 1/2$ critique
- $Q < 1/2$ apériodique

3 - Portrait de phase

4 - D'autres CI

II Exemple du circuit RLC série → TD

Ce qu'il faut connaître

(cours : I et II)

- ▶₁ Quelle est l'équation qui caractérise un oscillateur harmonique amorti ? (écrive sous forme canonique : en faisant intervenir la pulsation propre et le facteur de qualité)
- ▶₂ Donner les trois types de régimes transitoires observables pour un oscillateur harmonique amorti en fonction de la valeur du facteur de qualité.
- ▶₃ Tracer pour chacun des régimes précédents l'allure de la réponse en fonction du temps (on prendra par exemple $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 > 0$).
- ▶₄ De même, tracer pour chacun l'allure du portrait de phase.
- ▶₅ Dans quel cas le régime transitoire est-il le plus bref ? Donner alors l'ordre de grandeur de sa durée en fonction de la pulsation propre.
- ▶₆ Quelle est le paramètre qui donne l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations dans le régime transitoire pseudo-périodique ? Quelle est la durée approximative d'une oscillation si Q est assez grand ?

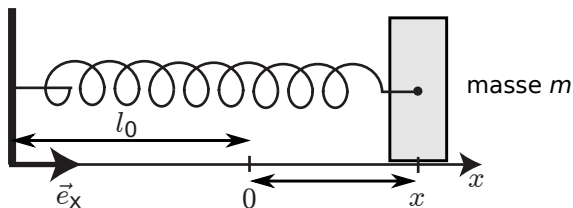
Ce qu'il faut savoir faire

- ▶₇ **Étude d'un système du second ordre en régime transitoire amorti :** → **EC1, EC2, EC3, TD I, II, III**
 - obtenir l'équation du mouvement, l'écrire sous forme canonique pour identifier le facteur de qualité et la pulsation propre,
 - la résoudre complètement pour une valeur du facteur de qualité Q donnée (les conditions initiales étant données, par exemple $x(t=0) = 0$ et $v(t=0) = v_0$),
 - donner l'allure de la solution, et du portrait de phase associé.
- ▶₈ Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.
- ▶₉ Prévoir l'évolution du système en utilisant un portrait de phase fournit → **EC4**

Exercices de cours

Remarque : Les exercices de cours ci-dessous concernent le système masse-ressort horizontal. Il faut également savoir traiter la même chose pour la décharge du circuit RLC (exercice II du TD) ou sa charge lorsqu'il est soumis à un échelon (exercice III du TD). Le circuit RLC peut donc également être posé en exercice de cours.

Exercice C1 – Aboutir à l'équation du mouvement dans le cas du système masse-ressort avec frottements



On considère le système ci-contre. On se place dans un référentiel terrestre supposé galiléen. Les frottements sont modélisés par une force s'exerçant sur la masse dont l'expression est $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$, $\lambda > 0$ étant une constante.

- 1 - Faire un bilan des forces sur le système {masse}, appliquer le principe fondamental de la dynamique et en déduire l'équation portant sur la position $x(t)$.
- 2 - Mettre cette équation sous forme canonique, donner alors l'expression du facteur de qualité et de la pulsation propre en fonction de λ , m et k .

Exercice C2 – Résoudre l'équation de l'oscillateur amorti, les CI étant données

On reprend le cas précédent et ses résultats, en particulier l'équation différentielle sur $x(t)$: $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. On se place dans un cas où $Q > 1/2$. On se donne des conditions initiales : à $t = 0$, $x(0) = 0$ et $v(0) = v_0 > 0$.

- 1 - Résoudre l'équation du mouvement pour obtenir la solution $x(t)$. On déterminera les constantes d'intégration. On tracera l'allure de la solution.
- 2 - Variante possible : reprendre la question 1 en supposant cette fois que à $t = 0$, $x(0) = x_0 > 0$ et $v(0) = 0$.
- 3 - Variante possible : reprendre la question 1 en supposant que $Q < 1/2$ ou que $Q = 1/2$.

Exercice C3 – Tracer un portrait de phase

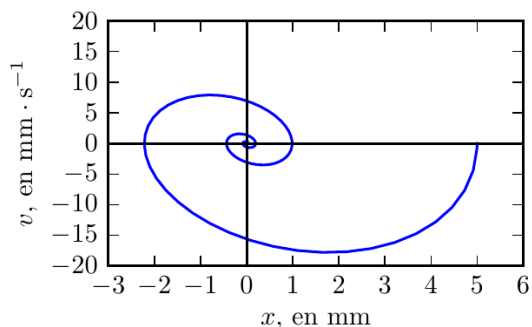
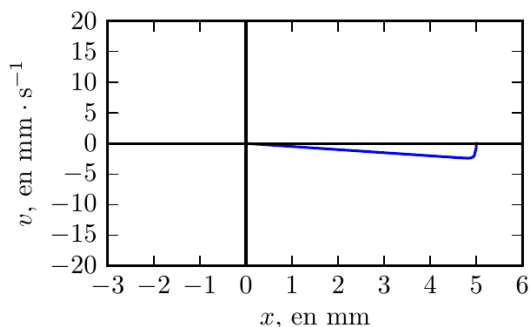
On reprend le cas précédent ($Q > 1/2$) et ses résultats : $x(t) = \frac{v_0}{\Omega} \sin(\Omega t) e^{-\mu t}$. On se donne des conditions initiales : à $t = 0$, $x(0) = 0$ et $v(0) = v_0 > 0$.

- 1 - Tracer l'allure du portrait de phase du système.

Exercice C4 – Utiliser un portrait de phase

On donne les portraits de phase ci-dessous, tracés pour l'évolution d'une masse oscillant dans deux types de fluides visqueux. Pour chacun :

- 1 - Donner le sens de parcours. Indiquer de quel type de régime il s'agit (pseudo-périodique, ...).
- 2 - Tracer l'évolution de $x(t)$ en fonction de t .



Comment obtenir les solutions de l'équation différentielle de l'oscillateur amorti ?

Équation du type $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha$ avec α une constante.

★ Solution homogène : pour l'obtenir on écrit le polynôme caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$. On cherche son discriminant et ses racines.

- Si $Q > 1/2$: $x_{\text{hom}}(t) = (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) e^{-\mu t}$ (on écrit les racines du polynôme caractéristique comme $r_{\pm} = -\mu \pm i\Omega$)
- Si $Q = 1/2$: $x_{\text{hom}}(t) = (At + B) e^{-\mu t}$ ($-\mu$ est racine double du polynôme caractéristique)
- Si $Q < 1/2$: $x_{\text{hom}}(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ (r_1 et r_2 sont les racines du polynôme caractéristique)

★ Solution particulière : on la suppose constante, il reste donc $0 + 0 + \omega_0^2 x = \alpha$, d'où $x_{\text{part}} = \frac{\alpha}{\omega_0^2}$.

★ Solution $x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{part}}$.

★ On détermine A et B avec les deux conditions initiales.

Documents associés au cours

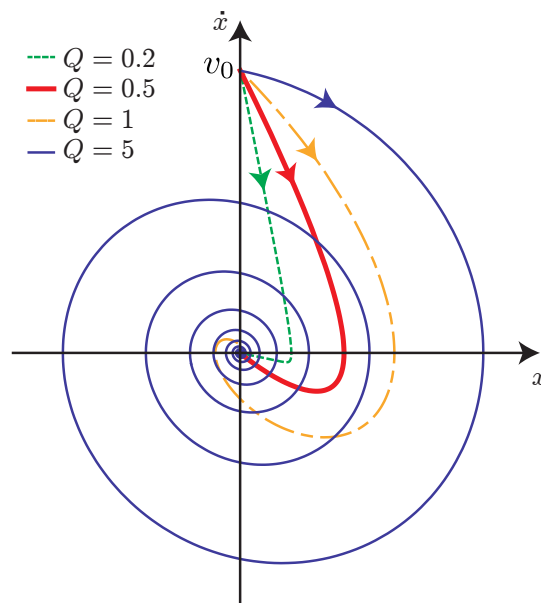
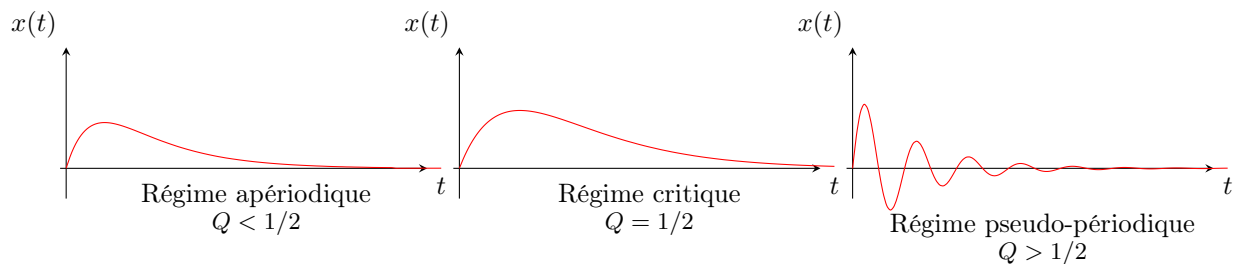
Animations pour le système masse-ressort

★ Lien vers une vidéo montrant les différents régimes d'amortissement pour l'oscillation d'une masse+ressort : cf site classe.

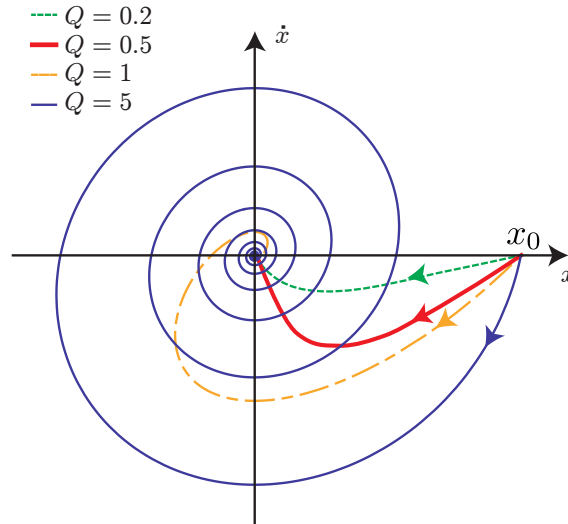
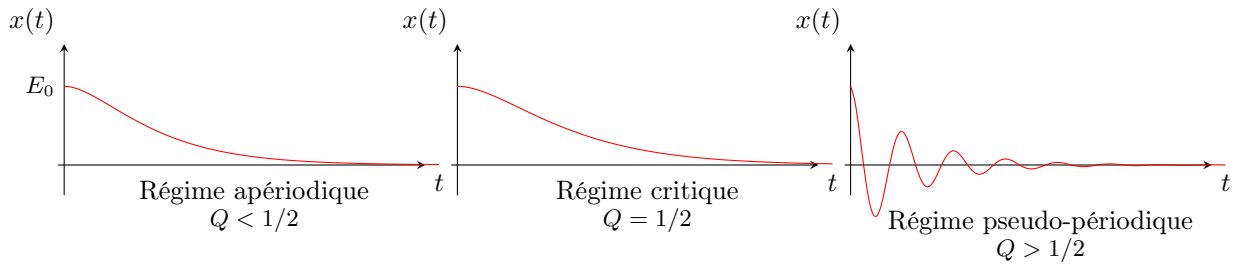
★ Animation permettant de régler le facteur de qualité, les CI, et de visualiser l'allure et le portrait de phase : cf site classe.

Solutions de l'équation $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

a/ Conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 > 0$

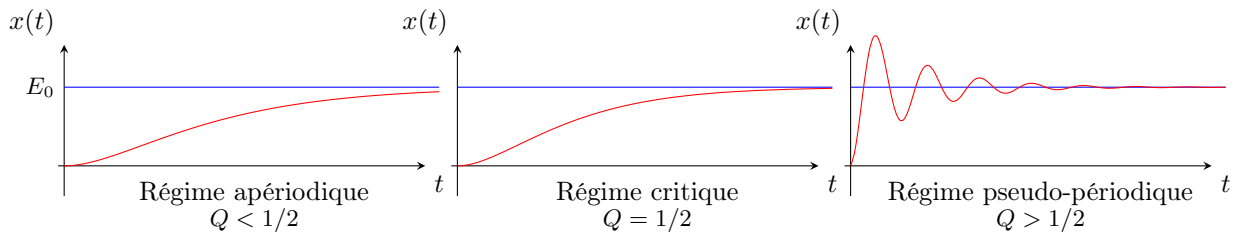


b/ Conditions initiales $x(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$



Solutions de l'équation $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha$

a/ Conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$



Réponse $x(t)$ pour un système du 2^e ordre soumis à un échelon d'amplitude E_0 .