

## I.2 du cours, correction de l'EC 2

On souhaite résoudre l'équation  $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ .

**Cas où  $Q > 1/2$ ,  $x(0) = 0$  et  $\dot{x}(0) = v_0 > 0$ .**

1 - ★ C'est le cas traité en cours. On obtient

$$x(t) = (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) e^{-\mu t},$$

et pour déterminer la pseudo-pulsation  $\Omega$  et le facteur  $\mu$  il faut trouver les racines de l'équation caractéristique.

On obtient (cf cours) :

$$\mu = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

★ Utilisation CI1 et CI2 : cf cours, on obtient  $A = 0$  et  $B = \frac{v_0}{\Omega}$ , d'où finalement

$$x(t) = \frac{v_0}{\Omega} \sin(\Omega t) e^{-\mu t}.$$

**Cas où  $Q < 1/2$ ,  $x(0) = 0$  et  $\dot{x}(0) = v_0 > 0$ .**

★ La solution particulière est nulle.

★ Équation homogène : régime apériodique, le discriminant est positif et l'équation caractéristique a deux racines réelles  $r_1$  et  $r_2$ , qui donnent la solution  $x_H(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ .

Le discriminant est  $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2)$ .

Les racines sont

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2)} \\ &= -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2} \\ &= -\frac{\omega_0}{2Q} (1 - \sqrt{1 - 4Q^2}) \\ r_2 &= -\frac{\omega_0}{2Q} (1 + \sqrt{1 - 4Q^2}) \end{aligned}$$

★ La solution générale est donc

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}.$$

★ Utilisation CI1 :  $x(0) = 0$ .

D'après la solution, on a  $x(0) = A + B$ .

Donc  $A = -B$ .

★ Utilisation CI2 :  $\dot{x}(0) = v_0$ .

Il faut dériver la solution :  $\dot{x}(t) = Ar_1 e^{r_1 t} + Br_2 e^{r_2 t}$ .

Donc  $\dot{x}(0) = Ar_1 + Br_2$ .

Donc  $Ar_1 + Br_2 = v_0$ . Donc  $Ar_1 - Ar_2 = v_0$ . Donc  $A = \frac{v_0}{r_1 - r_2}$  et  $B = -A$ .

★ Finalement :

$$x(t) = \frac{v_0}{r_1 - r_2} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t}).$$

**Cas où  $Q = 1/2$ ,  $x(0) = 0$  et  $\dot{x}(0) = v_0 > 0$**

★ La solution particulière est nulle.

★ Équation homogène : régime critique, le discriminant est nul et l'équation caractéristique a une racine double  $r_1 = \omega_0$ .

La solution est donc  $x_H(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$ .

★ Solution générale :  $x(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$ .

★ Utilisation CI1 :  $x(0) = 0$ .

D'après la solution, on a  $x(0) = B$ .

Donc  $B = 0$ .

★ Utilisation CI2 :  $\dot{x}(0) = v_0$ .

Il faut dériver la solution  $x(t) = Ate^{-\omega_0 t}$  :  $\dot{x}(t) = Ae^{-\omega_0 t} + At(-\omega_0)e^{-\omega_0 t}$ .

On a donc d'après la solution :  $\dot{x}(0) = A$ .

Donc  $A = v_0$ .

★ Finalement on a donc

$$x(t) = v_0 t e^{-\omega_0 t}.$$