Partie V : Étude des systèmes linéaires
Chapitre 3

Correction – TD – Régime transitoire des systèmes du 2^nd ordre

I Correction de l'EC 2

On souhaite résoudre l'équation $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

1 - Cas où $Q > 1/2$, $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 > 0$.

⋆ C'est le cas traité en cours. On obtient

$$\boxed{x(t) = \left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right)\,\mathrm{e}^{-\mu t},}$$

et pour déterminer la pseudo-pulsation Ω et le facteur μ il faut trouver les racines de l'équation caractéristique.

On obtient (cf cours) :

$$\boxed{\mu = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.}$$

⋆ Utilisation CI1 et CI2 : cf cours, on obtient $A = 0$ et $B = \frac{v_0}{\Omega}$, d'où finalement

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\Omega}\,\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t}.}$$

2 - Cas où $Q > 1/2$, $x(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$.

⋆ Ici aussi on a

$$\boxed{x(t) = \left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right)\,\mathrm{e}^{-\mu t}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\mu = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.}$$

⋆ Utilisation CI1 : $x(0) = x_0$.

D'après la solution, on a $x(0) = A$.

Donc $\boxed{A = x_0.}$

⋆ Utilisation CI2 : $\dot{x}(0) = 0$.

Il faut dériver la solution :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A\cos(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + B\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t}\right)\\ &= -A\Omega\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + A\cos(\Omega t)\,(-\mu)\mathrm{e}^{-\mu t} + B\Omega\cos(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + B\sin(\Omega t)\,(-\mu)\mathrm{e}^{-\mu t}\end{aligned}$$

Donc $\dot{x}(0) = -A\mu + B\Omega$.

Ceci doit être nul, donc on en déduit que $\boxed{B = A\frac{\mu}{\Omega} = x_0\frac{\mu}{\Omega}.}$

⋆ Finalement on a donc

$$\boxed{x(t) = x_0\left(\cos(\Omega t) + \frac{\mu}{\Omega}\sin(\Omega t)\right)\,\mathrm{e}^{-\mu t}.}$$

3 - Cas où $Q < 1/2$, $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 > 0$.

⋆ La solution particulière est nulle.

⋆ Équation homogène : régime apériodique, le discriminant est positif et l'équation caractéristique a deux racines réelles r_1 et r_2, qui donnent la solution :$x_H(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$.

Le discriminant est $\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2}\left(1 - 4Q^2\right)$.

Les racines sont

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2}\left(1 - 4Q^2\right)} \\ &= -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1 - 4Q^2} \\ &= -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 - \sqrt{1 - 4Q^2}\right) \\ r_2 &= -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 + \sqrt{1 - 4Q^2}\right) \end{aligned}$$

⋆ La solution générale est donc

$$\boxed{x(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}.}$$

⋆ Utilisation CI1 : $x(0) = 0$.

D'après la solution, on a $x(0) = A + B$.

Donc $A = -B$.

⋆ Utilisation CI2 : $\dot{x}(0) = v_0$.

Il faut dériver la solution : $\dot{x}(t) = Ar_1\mathrm{e}^{r_1 t} + Br_2\mathrm{e}^{r_2 t}$.

Donc $\dot{x}(0) = Ar_1 + Br_2$.

Donc $Ar_1 + Br_2 = v_0$. Donc $Ar_1 - Ar_2 = v_0$. Donc $A = \dfrac{v_0}{r_1 - r_2}$ et $B = -A$.

⋆ Finalement :

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{r_1 - r_2}\left(\mathrm{e}^{r_1 t} - \mathrm{e}^{r_2 t}\right).}$$

4 - Cas où $Q = 1/2$, $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 > 0$.

⋆ La solution particulière est nulle.

⋆ Équation homogène : régime critique, le discriminant est nul et l'équation caractéristique a une racine double $r_1 = \omega_0$.

La solution est donc $x_H(t) = (At + B)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$.

⋆ Solution générale : $\boxed{x(t) = (At + B)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}.}$

⋆ Utilisation CI1 : $x(0) = 0$.

D'après la solution, on a $x(0) = B$.

Donc $\boxed{B = 0.}$

⋆ Utilisation CI2 : $\dot{x}(0) = v_0$.

Il faut dériver la solution $x(t) = At\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$: $\dot{x}(t) = A\mathrm{e}^{-\omega_0 t} + At(-\omega_0)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$.

On a donc d'après la solution : $\dot{x}(0) = A$.

Donc $A = v_0$.

⋆ Finalement on a donc

$$\boxed{x(t) = v_0 t\mathrm{e}^{-\omega_0 t}.}$$

II Circuit RLC série : décharge

1 - Schéma obligatoire, avec interrupteur fermé, et flèches de tension sur les composants.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ u_L + u_R + u_C = 0\\
&\Leftrightarrow\ L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_C = 0\\
&\Leftrightarrow\ L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right) + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0\\
&\Leftrightarrow\ LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0\\
&\Leftrightarrow\ \frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = 0\\
&\Leftrightarrow\ \frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = 0
\end{aligned}$$

avec par identification $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$ donc $Q = \frac{L}{R}\omega_0$ soit après remplacement : $\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.}$

2 - $Q = 10 > 1/2$ donc le régime est pseudo-périodique.

La solution particulière est nulle ici, donc la solution est égale à la solution homogène :

$$\boxed{u_C(t) = (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))\ \mathrm{e}^{-\mu t},}$$

et pour déterminer la pseudo-pulsation Ω et le facteur μ il faut trouver les racines de l'équation caractéristique. Celle-ci est :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = -4\omega_0^2\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right) < 0$.

Les racines sont donc

$$\begin{aligned}
r_1 &= -\frac{\omega_0}{2Q} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)}\\
&= -\frac{\omega_0}{2Q} + \mathrm{i}\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\\
r_2 &= -\frac{\omega_0}{2Q} - \mathrm{i}\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.
\end{aligned}$$

On identifie avec $r_{1\text{ ou }2} = -\mu \pm \mathrm{i}\Omega$ pour obtenir :

$$\boxed{\mu = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.}$$

Ici $Q = 10$, donc $\Omega = \omega_0 \times 0{,}9987 \simeq \omega_0$.

3 - a/ Détermination des CI

⋆ Pour $u_c(0)$: on sait que la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps.

Or pour $t < 0$ le condensateur est chargé à U_0, donc $u_C(0^-) = U_0$.

Donc $u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0$.

⋆ Pour $\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(0)$:

Pour $t < 0$ le courant est nul car le circuit est ouvert, donc $i(0^-) = 0$.

Donc par continuité du courant (car il passe à travers une bobine) : $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

Donc $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{i(0^+)}{C} = 0.$

b/ Utilisation des CI

⋆ Utilisation CI1 : $u_C(0) = U_0$.

D'après la solution : $u_C(0) = A$.

Donc $\boxed{A = U_0.}$

⋆ Utilisation CI2 : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.

Il faut dériver la solution :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A\cos(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + B\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t}\right)\\ &= -A\Omega\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + A\cos(\Omega t)\,(-\mu)\mathrm{e}^{-\mu t} + B\Omega\cos(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + B\sin(\Omega t)\,(-\mu)\mathrm{e}^{-\mu t}\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) = -A\mu + B\Omega.$

Ceci doit être nul, donc on en déduit que $\boxed{B = A\dfrac{\mu}{\Omega} = U_0\dfrac{\mu}{\Omega}.}$

⋆ Ici on a $\Omega \simeq \omega_0$, donc $B = U_0\dfrac{\omega_0/(2Q)}{\Omega} = \dfrac{U_0}{2Q}$.

Finalement :

$$\boxed{u_C(t) = U_0\left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{2Q}\sin(\Omega t)\right)\,\mathrm{e}^{-\mu t}.}$$

4 - Tracer l'allure de la solution, et tracer également l'allure du portrait de phase $(u_c,\dot{u}_c)$.

III Circuit RLC série : soumis à un échelon de tension

Contrairement à ce que dit l'énoncé, on raisonne sur u_C. C'est de toute façon pareil à un facteur C près, puisque $u_C = C \times q$.

1 - Schéma obligatoire, avec source de tension égale à E, et flèches de tension sur les composants. Même démarche que dans l'exercice précédent :

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ u_L + u_R + u_C = E\\ &\Leftrightarrow\ L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_C = E\\ &\Leftrightarrow\ L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right) + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E\\ &\Leftrightarrow\ LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E\\ &\Leftrightarrow\ \frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{1}{LC}E\\ &\Leftrightarrow\ \frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2u_C = \omega_0^2E\end{aligned}$$

avec par identification $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R}{L}$ donc $Q = \dfrac{L}{R}\omega_0$ soit après remplacement : $\boxed{Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}.}$

2 - $\star$ Solution particulière : on la suppose constante, donc il reste $\omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$, donc $u_{C,P} = E$.

$\star$ Solution de l'équation homogène : identique à l'exercice précédent, on a

$$u_{C,H}(t) = (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))\ \mathrm{e}^{-\mu t},$$

avec

$$\boxed{\mu = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.}$$

Ici $Q = 10$, donc $\Omega = \omega_0 \times 0{,}9987 \simeq \omega_0$.

$\star$ Solution totale :

$$\boxed{u_C(t) = E + (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))\ \mathrm{e}^{-\mu t}.}$$

$\star$ Détermination des conditions initiales (pas vraiment demandé) : Pour $t < 0$ on a $u_C = 0$ (condensateur non chargé) et $i = 0$ (générateur éteint).

Donc $u_C(0^-) = 0$ et $i(0^-) = 0$.

Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, on a $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$.

Et par continuité de l'intensité traversant une bobine : $i(0^+) = i(0^-) = 0$. Donc $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{i(0^+)}{C} = 0$.

$\star$ Utilisation CI1 : $u_C(0) = 0$.

D'après la solution : $u_C(0) = A + E$.

Donc $\boxed{A = -E.}$

$\star$ Utilisation CI2 : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.

Il faut dériver la solution, c'est la même chose que dans l'exercice précédent car E est une constante, donc on obtient : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) = -A\mu + B\Omega$.

Ceci doit être nul, donc on en déduit que $\boxed{B = A\dfrac{\mu}{\Omega} = -E\dfrac{\mu}{\Omega}.}$

$\star$ Ici on a $\Omega \simeq \omega_0$, donc $B = -E\dfrac{\omega_0/(2Q)}{\Omega} = -\dfrac{E}{2Q}$.

Finalement :

$$\boxed{u_C(t) = E - E\left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{2Q}\sin(\Omega t)\right)\ \mathrm{e}^{-\mu t}.}$$

3 - Tracer l'allure de la solution, et tracer également l'allure du portrait de phase $(q,\dot{q})$.

IV Système masse-ressort vertical