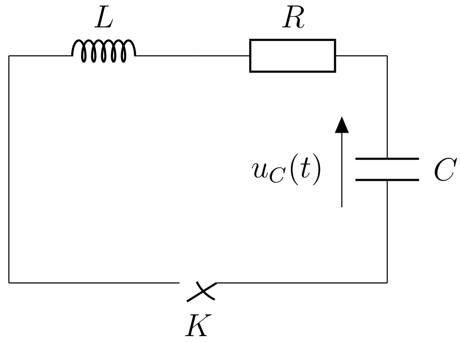
Partie V : Étude des systèmes linéaires
Chapitre 3

TD – Régime transitoire des systèmes du 2nd ordre

Remarque : exercice avec $\star$: exercice particulièrement important, à maîtriser en priorité (de même que les exemples de questions de cours des "ce qu'il faut savoir faire") | [$\bullet \circ \circ$] : difficulté des exercices

I Circuit RLC série : décharge $\star$ | [$\bullet \circ \circ$]

On étudie le circuit ci-contre, où le condensateur est initialement chargé à une tension $U_c(t = 0^-) = U_0$. Pour $t < 0$ le circuit est ouvert. Il est refermé à $t = 0$.



1 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur. On l'écrira sous forme canonique en introduisant la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q.

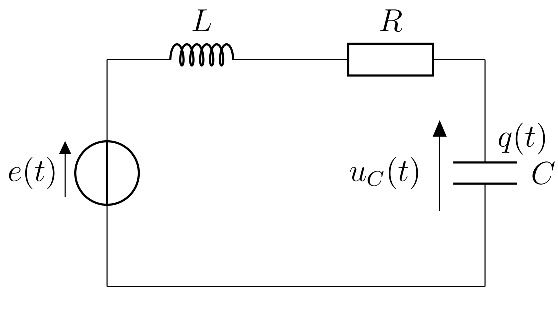
2 - On suppose que $Q = 10$. Déterminer la forme générale des solutions de l'équation différentielle.

3 - Que valent u_c et $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ à $t = 0$? Ceci doit permettre ensuite d'obtenir l'expression des constantes A et B qui apparaissent dans la solution.

4 - Tracer l'allure de la solution, et tracer également l'allure du portrait de phase $(u_c, \dot{u}_c)$.

II Circuit RLC série : soumis à un échelon de tension $\star$ | [$\bullet \circ \circ$]

On étudie le circuit ci-contre, où le condensateur est initialement déchargé.
Pour $t < 0$, le générateur de tension est éteint.
Pour $t > 0$, ce générateur délivre une tension $E > 0$ continue.



1 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la charge aux bornes du condensateur. On l'écrira sous forme canonique en introduisant la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q.

2 - On suppose que $Q = 10$. Déterminer les solutions de l'équation différentielle.

3 - Tracer l'allure de la solution, et tracer également l'allure du portrait de phase $(q, \dot{q})$.

III Système masse-ressort vertical [$\bullet \circ \circ$]

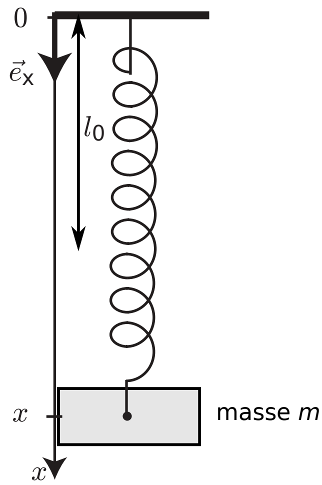
On considère une masse m attachée à un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. Le tout est vertical.
On considère que la masse est soumise à des frottements visqueux, dont l'action est modélisée par une force du type $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$.

1 - Déterminer l'équation différentielle suivie par la position $x(t)$.

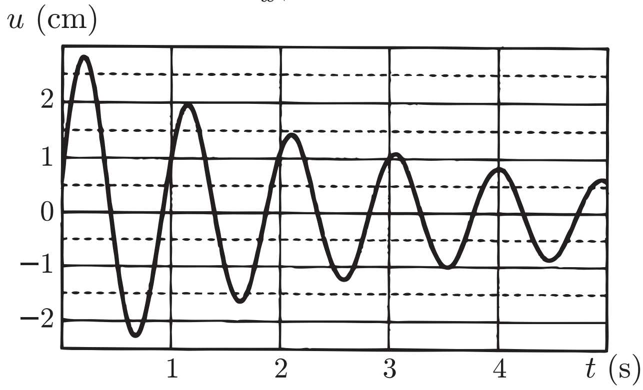
2 - Quelle est la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$?

3 - On pose $u(t) = x(t) - x_{\text{éq}}$. Donner l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$.

4 - Résoudre cette équation. On considèrera qu'à l'instant initial la masse est en $x = x_{\text{éq}}$, et qu'on lui communique une vitesse initiale v_0 vers le bas.



On dispose d'un enregistrement de la grandeur $u(t)$ au cours du temps.
On définit par ailleurs le **décrément logarithmique** comme $\delta = \ln \dfrac{u(t)}{u(t+T)}$ avec $T = 2\pi/\Omega$ la pseudo-période.



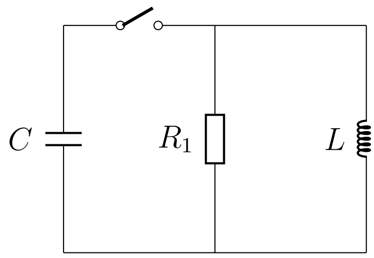
5 - Dans quel type de régime le système est-il ? Donner un ordre de grandeur de son facteur de qualité.

6 - Montrer théoriquement que le décrément logarithmique est constant tout au long du mouvement.

7 - Ceci est-il le cas sur l'enregistrement ? Exploiter le graphique pour en déduire un estimation des valeurs de la pseudo-période et du facteur de qualité.

IV Circuit RLC parallèle [● ○ ○]

On étudie le circuit ci-contre, où le condensateur est initialement chargé à une tension $u_c(t = 0^-) = U_0$. À $t = 0$ on ferme l'interrupteur.



1 - Déterminer les valeurs des courants dans chacune des branches et de u_c à $t = 0^+$ juste après la fermeture de l'interrupteur.

Même question au bout d'un temps long après fermeture de l'interrupteur, une fois le régime permanent atteint.

2 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur. On posera la pulsation propre ω_0 et on définira le facteur de qualité Q tel que l'équation obtenue soit sous forme canonique.

3 - On prend $L = 1.0\,\text{mH}$ et $C = 4.0\,\text{nF}$. Déterminer la valeur de la résistance telle que le régime transitoire soit critique.

4 - Tracer alors l'allure du portrait de phase $\left(u_c(t), \dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}\right)$ correspondant à l'évolution temporelle de u_c.

5 - Donner, pour le régime critique, la forme générale des solutions. Préciser enfin l'expression des constantes qui apparaissent dans l'expression de la solution.