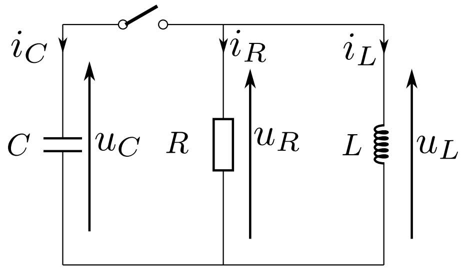
Partie V : Étude des systèmes linéaires
Chapitre 3

Correction – DM 11 – Circuit RLC parallèle

Schéma obligatoire avec convention récepteur pour tous les récepteurs :



1 - ⋆ **Instant initial** ($t = 0^+$) :

– Seules deux grandeurs sont continues : $u_C(t)$ et $i_L(t)$.
Et on sait que $u_C(0^-) = U_0$ et $i_L(0^-) = 0$.
On a donc $\boxed{u_C(0^+) = U_0}$ et $\boxed{i_L(0^+) = 0}$.

– Tout est en dérivation donc quel que soit t on a $u_R(t) = u_L(t) = u_C(t)$.
En particulier : $\boxed{u_R(0^+) = u_L(0^+) = u_C(0^+) = U_0.}$
Donc $\boxed{i_R(0^+) = \dfrac{u_R(0^+)}{R} = \dfrac{U_0}{R}.}$

– Loi des nœuds appliquée en particulier à 0^+ : $i_L(0^+) + i_R(0^+) + i_C(0^+) = 0$,
donc $\boxed{i_C(0^+) = -i_R(0^+) - i_L(0^+) = -\dfrac{U_0}{R}.}$

⋆ **Au bout d'un temps long après fermeture de l'interrupteur :** il y a une résistance qui dissipe l'énergie, donc tous les courants et toutes les tensions sont nulles.

2 - Suite d'étapes :

$$i_c + i_L + i_R = 0 \quad \text{(loi des nœuds)}$$
$$C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + i_L + \frac{u_R}{R} = 0 \quad \text{(loi d'Ohm et loi condensateur)}$$
$$C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + i_L + \frac{u_c}{R} = 0$$
$$C\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{u_c}{R} = 0 \quad \text{(on dérive tout par rapport au temps)}$$
$$C\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{u_L}{L} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{u_c}{R} = 0 \quad \text{(loi bobine)}$$
$$C\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{u_c}{L} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{u_c}{R} = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{u_c}{LC} = 0$$
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_c = 0}$$

avec $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}.}$

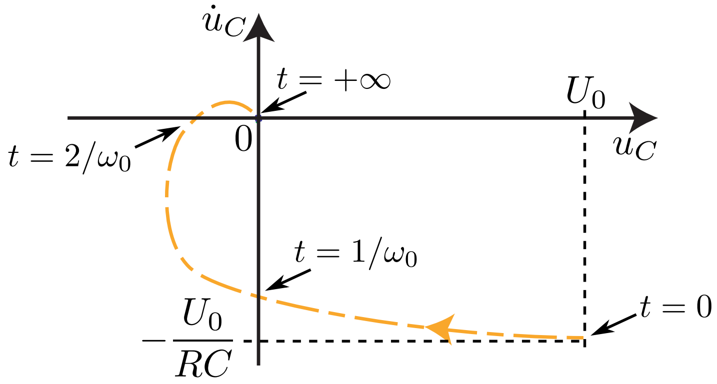
(on remarque que Q à l'expression inverse de celle pour le RLC série !)

3 - Le régime est critique pour $Q = 1/2$, donc pour $R\sqrt{\dfrac{C}{L}} = \dfrac{1}{2}$, donc pour $\boxed{R = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 250\,\Omega.}$

4 - À $t = 0$ on est en $u_C(0^+) = U_0$ et $\dot{u}_C(0^+) = \dfrac{i_C(0^+)}{C} = -\dfrac{U_0}{RC}$.

On tend en $+\infty$ vers $u_C = 0$ et $\dot{u}_C = 0$.

On se place dans le régime critique (question suivante). On a donc l'allure ci-dessous.



5 - Ici $Q = 1/2$: le discriminant est nul.

⋆ L'équation n'a pas de second membre, donc la solution particulière est nulle et la forme générale des solutions est

$$\boxed{u_C(t) = (At + B)\mathrm{e}^{-\mu t}.}$$

Pour trouver μ on cherche la racine de l'équation caractéristique : $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$, donc la racine est $r = -\dfrac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$. On a donc $\mu = \omega_0$.

⋆ Condition initiale 1 : $u_C(0) = U_0$.

D'après la solution $u_C(0) = B$, donc $B = U_0$.

⋆ Condition initiale 2 : $\dot{u}_C(0) = -\dfrac{U_0}{RC}$ (cf question 4).

D'après la solution $\dot{u}_C = A\mathrm{e}^{-\omega_0 t} + (At + B)(-\omega_0)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$, donc $\dot{u}_C(0) = A - \omega_0 B$.

On a donc $A - \omega_0 B = -\dfrac{U_0}{RC}$, d'où $A = \omega_0 U_0 - \dfrac{U_0}{RC}$.

⋆ Finalement :

$$\boxed{u_C(t) = U_0\left[\left(\omega_0 - \frac{1}{RC}\right)t + 1\right]\mathrm{e}^{-\omega_0 t}.}$$

Remarque : On a $\omega_0 RC = \dfrac{RC}{\sqrt{LC}} = Q = \dfrac{1}{2}$, donc $\dfrac{1}{RC} = 2\omega_0$. Ainsi l'expression de $u_c(t)$ s'écrit aussi :

$$\boxed{u_C(t) = U_0\,(1 - \omega_0 t)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}.}$$

Ainsi, pour $t = 1/\omega_0$ la tension passe de positive à négative.
On peut aussi calculer la dérivée, et obtenir

$$\boxed{\dot{u}_C(t) = -\frac{U_0}{RC}\left(1 - \frac{\omega_0 t}{2}\right)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}.}$$

Ainsi, la fonction $u_C(t)$ décroit de $t = 0$ à $t = 2/\omega_0$ et croît ensuite vers son asymptote (valeur nulle en $+\infty$).