Partie V : Étude des systèmes linéaires
Chapitre 2

# Oscillateurs harmoniques

**ou régime libre des systèmes du second ordre non amortis**

**I Le système masse-ressort décrit de façon idéale**

**1 - Description d'un ressort** $\boxed{\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{\text{ext}}}$

**2 - Bilan des forces, PFD**

on aboutit à une équation de l'oscillateur harmonique :

$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha}$

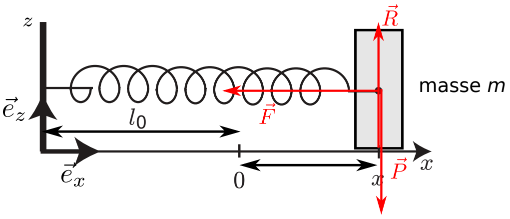
**3 - Résolution**

$x(t) = x_{\text{part}} + x_{\text{hom}}$ solution générale

$\left| \begin{array}{l} x_{\text{part}} = \dots \\ x_{\text{hom}} = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \end{array} \right.$

+CI pour déterminer *A* et *B*

Tracé de la solution.
Amplitude, pulsation, période, fréquence.




**4 - Portrait de phase**

**5 - Étude énergétique**

$\left| \begin{array}{l} E_{p,\text{ress}} = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 \\ E_{p,\text{pes}} = mgz \\ E_c = \frac{1}{2}mv^2 \end{array} \right. \longrightarrow E_m = E_c + E_{p,\text{ress}} + E_{p,\text{pes}}$

ppté : $E_m = \text{cst}$ si pas de dissipation

**6 - D'autres CI ou repérages**

**7 - Conclusions sur l'OH**

**II Étude du circuit LC idéal**

**TD**

**III Le système masse-ressort vertical**

**TD**

## Ce qu'il faut connaître

——— (cours : I)

►1 Quelle est l'équation qui caractérise un oscillateur harmonique ?

►2 Comment s'écrivent ses solutions ?

►3 Quelle est l'expression de la force exercée par un ressort sur un objet accroché à une de ses extrémités ? On fera un schéma.

——— (cours : I.5 : énergie)

►4 Quelle est l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur ?

►5 Et celle de l'énergie potentielle associée au ressort ?

►6 Quelle est l'expression de l'énergie cinétique d'une masse $m$ ?

►7 Quelle est l'expression de l'énergie mécanique ? Quelle propriété possède-t-elle si toutes les forces qui travaillent sont conservatives ?

## Ce qu'il faut savoir faire

——— (cours : I)

►8 Aboutir à l'équation du mouvement dans le cas du système masse-ressort. → **EC1**

►9 Résoudre l'équation de l'oscillateur harmonique, les CI étant données. → **EC2**

►10 Caractériser le mouvement en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.

►11 Tracer un portrait de phase. → **EC3**

►12 Réaliser un bilan énergétique sur le système masse-ressort. → **EC4**

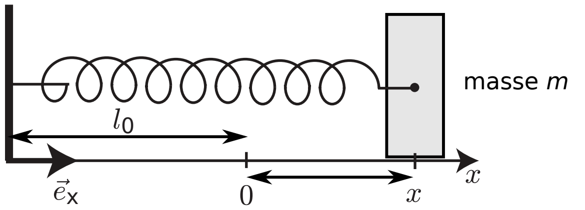
(cours : II, III et de façon générale)

Les savoir faire précédents sont mobilisables dans d'autres situations où la modélisation aboutit à l'équation d'un oscillateur harmonique.

- Exemples : circuit LC (TD), masse-ressort vertical (TD, il faut alors savoir déterminer la position d'équilibre), etc...

## Exercices de cours

### Exercice C1 – Aboutir à l'équation du mouvement dans le cas du système masse-ressort




On considère le système ci-contre. On néglige tout frottement et on se place dans un référentiel terrestre supposé galiléen.

**1 -** Faire un bilan des forces sur le système {masse}, appliquer le PFD et en déduire l'équation portant sur la position $x(t)$.

### Exercice C2 – Résoudre l'équation de l'oscillateur harmonique, les CI étant données

On reprend le cas précédent et ses résultats, notamment l'équation satisfaite par $x(t)$ : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. On se donne des conditions initiales : à $t = 0$, $x(0) = 0$ et $v(0) = v_0 > 0$.

**1 -** Résoudre l'équation du mouvement pour obtenir la solution $x(t)$. On déterminera les constantes d'intégration.

**2 -** Alternative : Reprendre cette question en supposant cette fois que à $t = 0$, $x(0) = x_0 > 0$ et $v(0) = 0$.

### Exercice C3 – Tracer un portrait de phase

On reprend le cas précédent et ses résultats : $x(t) = \dfrac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$. On se donne des conditions initiales : à $t = 0$, $x(0) = 0$ et $v(0) = v_0 > 0$.

**1 -** Tracer le portrait de phase du système.

### Exercice C4 – Réaliser un bilan énergétique sur le système masse-ressort

On reprend le cas précédent et ses résultats : $x(t) = \dfrac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$. On se donne des conditions initiales : à $t = 0$, $x(0) = 0$ et $v(0) = v_0 > 0$.

**1 -** Donner l'expression de l'énergie mécanique du système {masse ressort} en fonction de $x(t)$, de $\dot{x}(t)$ et d'autres paramètres.

**2 -** Dériver par rapport au temps cette expression et montrer que l'énergie mécanique est bien conservée.

**3 -** Qu'est ce qui permettait de prédire cette conservation sans faire aucun calcul ?

## Méthodes

> **Méthode 1 : Comment obtenir l'équation du mouvement pour un problème de mécanique ?**
> Revoir la fiche de début du chapitre sur la mécanique (chapitre 1).
> Exemple : le I.2 du cours pour le système masse-ressort horizontal.

**Méthode 2 : Comment obtenir l'équation la grandeur voulue pour un problème électrique ?**
Revoir la fiche de début du chapitre sur l'électronique.
Exemple : le TD sur l'oscillateur LC

**Méthode 3 : Comment obtenir les solutions de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique ?**
Équation du type $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha}$ avec $\alpha$ une constante.

- On écrit la forme générale des solutions : $x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{part}}(t)$, avec
  - $x_{\text{part}}$ solution particulière, constante ici, donc $\ddot{x}_{\text{part}} = 0$ et l'équation donne $0 + \omega_0^2 x_{\text{part}} = \alpha$, soit $x_{\text{part}} = \dfrac{\alpha}{\omega_0^2}$. (donc si $\alpha = 0$ alors $x_{\text{part}} = 0$)
  - $x_{\text{hom}}$ solution de l'équation homogène, $\boxed{x_{\text{hom}}(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t}$ (forme à connaître par cœur) avec $A$ et $B$ des constantes à déterminer.

  Donc on a

$$\boxed{x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{\alpha}{\omega_0^2}.} \tag{1}$$

- On détermine les constantes $A$ et $B$ à l'aide des conditions initiales. Par exemple supposons que :

$$x(0) = x_0 \quad \text{(CI 1)}$$
$$\dot{x}_0 = v_0 \quad \text{(CI 2)}$$

  On raisonne sur la solution *complète* (équation (1) ci dessus).

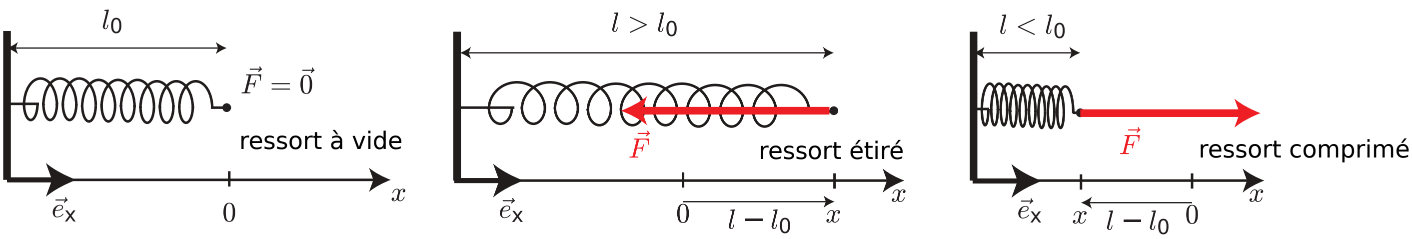
  - <u>CI 1 :</u> D'après la solution, $x(0) \overset{\text{sol}}{=} A + \dfrac{\alpha}{\omega_0^2}$.

    Or $x(0) \overset{\text{CI}}{=} x_0$.
    On en déduit $A + \dfrac{\alpha}{\omega_0^2} = x_0$, d'où $A =$...
  - <u>CI 2 :</u> On calcule $\dot{x}(t) = \left(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \dfrac{\alpha}{\omega_0^2}\right) = -A\omega_0 \sin\omega_0 t + B\omega_0\cos\omega_0 t$.

    <u>Puis</u> on prend la valeur en $t = 0$ : $\dot{x}(0) \overset{\text{sol}}{=} B\omega_0$.
    Or $\dot{x}(0) \overset{\text{CI}}{=} v_0$.
    On en déduit $B\omega_0 = v_0$, d'où $B =$...

## Documents associés au cours

### I.1 – Description d'un ressort




### I.4 – Portrait de phase

⋆ Lien vers une animation permettant de tracer le portrait de phase :
http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort.php
Prendre $\lambda = 0$ pour ne pas avoir d'amortissement et obtenir l'équation de l'oscillateur harmonique du cours.