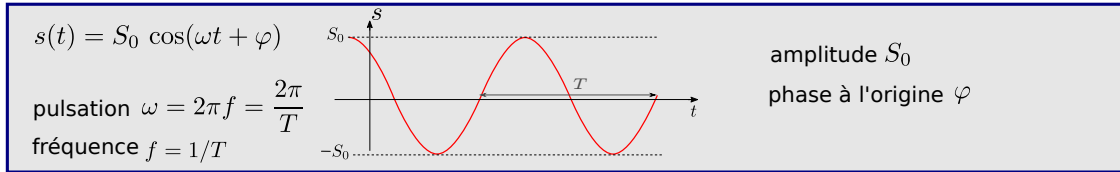


# Oscillateur harmonique

systèmes du second ordre non amortis

## I Signal harmonique



## II Le système masse-ressort décrit de façon idéale

1 - Description d'un ressort  $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{\text{ext}}$

### 2 - Bilan des forces, PFD

on aboutit à une équation de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha$$

### 3 - Résolution

solution générale

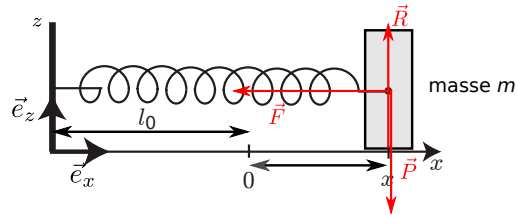
$$x(t) = x_{\text{part}} + x_{\text{hom}}$$

$$x_{\text{part}} = \dots$$

$$x_{\text{hom}} = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

+CI pour déterminer A et B

Tracé de la solution.  
Amplitude, pulsation, période, fréquence.



### 4 - Étude énergétique

$$\begin{cases} E_{p,\text{ress}} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 \\ E_{p,\text{pes}} = mgz \\ E_c = \frac{1}{2}mv^2 \end{cases} \rightarrow E_m = E_c + E_{p,\text{ress}} + E_{p,\text{pes}}$$

ppté :  $E_m = \text{cst}$  si pas de dissipation

### 5 - D'autres CI ou repérages

## III Étude du circuit LC idéal

TD

## IV Le système masse-ressort vertical

TD

## Ce qu'il faut connaître

\_\_\_\_\_ (cours : I)

- <sub>1</sub> Quelle est l'écriture mathématique générale d'un signal harmonique ? Nommer les différents paramètres qui y interviennent. Tracer l'allure du signal.
- <sub>2</sub> Quelle est la relation entre la pulsation et la fréquence ? et entre la pulsation et la période ?

\_\_\_\_\_ (cours : II)

- <sub>3</sub> Quelle est l'équation qui caractérise un oscillateur harmonique ?
- <sub>4</sub> Comment s'écrivent ses solutions ?
- <sub>5</sub> Comment s'écrit la force exercée par un ressort sur un objet accroché à une de ses extrémités ? On fera un schéma.

\_\_\_\_\_ (cours : II.4 : énergie)

- <sub>6</sub> Quelle est l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur ?
- <sub>7</sub> Et celle de l'énergie potentielle associée au ressort ?
- <sub>8</sub> Quelle est l'expression de l'énergie cinétique d'une masse  $m$  ?
- <sub>9</sub> Quelle est l'expression de l'énergie mécanique ? Quelle propriété possède-t-elle si toutes les forces qui travaillent sont conservatives ?

## Ce qu'il faut savoir faire

\_\_\_\_\_ (cours : I)

- <sub>10</sub> Aboutir à l'équation du mouvement dans le cas du système masse-ressort. →
- <sub>11</sub> Résoudre l'équation de l'oscillateur harmonique, les CI étant données. →

EC1

EC2

►<sub>12</sub> Caractériser le mouvement en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.

►<sub>13</sub> Réaliser un bilan énergétique sur le système masse-ressort. →

**EC3**

————— (cours : II, III et de façon générale)

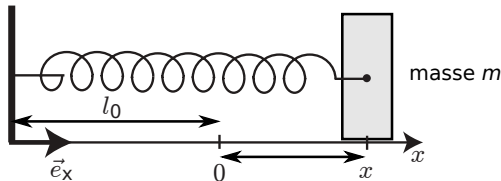
Les savoir faire précédents sont mobilisables dans d'autres situations où la modélisation aboutit à l'équation d'un oscillateur harmonique.

– Exemples : circuit LC (TD), masse-ressort vertical (TD, il faut alors savoir déterminer la position d'équilibre), etc...

## Exercices de cours

---

### Exercice C1 – Aboutir à l'équation du mouvement dans le cas du système masse-ressort



On considère le système ci-contre. On néglige tout frottement et on se place dans un référentiel terrestre supposé galiléen.

- 1 - Faire un bilan des forces sur le système {masse}, appliquer le PFD, en déduire l'équation portant sur la position  $x(t)$ .

### Exercice C2 – Résoudre l'équation de l'oscillateur harmonique, les CI étant données

On reprend le cas précédent et ses résultats, notamment l'équation satisfaite par  $x(t)$  :  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ . On se donne des conditions initiales : à  $t = 0$ ,  $x(0) = 0$  et  $v(0) = v_0 > 0$ .

- 1 - Résoudre l'équation du mouvement pour obtenir la solution  $x(t)$ . On déterminera les constantes d'intégration.
- 2 - Alternative : Reprendre cette question en supposant cette fois que à  $t = 0$ ,  $x(0) = x_0 > 0$  et  $v(0) = 0$ .

### Exercice C3 – Réaliser un bilan énergétique sur le système masse-ressort

On reprend le cas de l'EC2 et ses résultats :  $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$ . On se donne des conditions initiales : à  $t = 0$ ,  $x(0) = 0$  et  $v(0) = v_0 > 0$ .

- 1 - Donner l'expression de l'énergie mécanique du système {masse et ressort} en fonction de  $x(t)$ , de  $\dot{x}(t)$  et d'autres paramètres.
- 2 - Dériver par rapport au temps cette expression et montrer que l'énergie mécanique est bien conservée.
- 3 - Qu'est ce qui permettrait de prédire cette conservation sans faire aucun calcul ?

**Variante : circuit LC (exercice II du TD) ou masse-ressort vertical (TD III)**

## Méthodes

---

**Méthode 1 : Comment obtenir l'équation du mouvement pour un problème de mécanique ?**

Revoir la fiche de début du chapitre sur la mécanique (chapitre 1).

Exemple dans ce chapitre : le 1.2 du cours pour le système masse-ressort horizontal.

## Méthode 2 : Comment obtenir l'équation la grandeur voulue pour un problème électrique ?

Revoir la fiche de début du chapitre sur l'électronique.

Exemple dans ce chapitre : le TD sur l'oscillateur LC

## Méthode 3 : Comment obtenir les solutions de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique ?

Équation du type  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha$  avec  $\alpha$  une constante.

- ▶ On écrit la forme générale des solutions :  $x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{part}}(t)$ , avec
  - $x_{\text{part}}$  solution particulière, constante ici, donc  $\ddot{x}_{\text{part}} = 0$  et l'équation donne  $0 + \omega_0^2 x_{\text{part}} = \alpha$ , soit  $x_{\text{part}} = \frac{\alpha}{\omega_0^2}$ . (donc si  $\alpha = 0$  alors  $x_{\text{part}} = 0$ )
  - $x_{\text{hom}}$  solution de l'équation homogène,  $x_{\text{hom}}(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$  (forme à connaître par cœur) avec  $A$  et  $B$  des constantes à déterminer.

Donc on a

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{\alpha}{\omega_0^2}. \quad (1)$$

- ▶ On détermine les constantes  $A$  et  $B$  à l'aide des conditions initiales. Par exemple supposons que :

$$x(0) = x_0 \quad (\text{CI 1})$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad (\text{CI 2})$$

On raisonne sur la solution *complète* (équation (1) ci dessus).

- CI 1 : D'après la solution,  $x(0) \stackrel{\text{sol}}{=} A + \frac{\alpha}{\omega_0^2}$ .

Or  $x(0) \stackrel{\text{CI}}{=} x_0$ .

On en déduit  $A + \frac{\alpha}{\omega_0^2} = x_0$ , d'où  $A = \dots$

- CI 2 : On calcule  $\dot{x}(t) = \left( A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{\alpha}{\omega_0^2} \right) = -A\omega_0 \sin \omega_0 t + B\omega_0 \cos \omega_0 t$ .

Puis on prend la valeur en  $t = 0$  :  $\dot{x}(0) \stackrel{\text{sol}}{=} B\omega_0$ .

Or  $\dot{x}(0) \stackrel{\text{CI}}{=} v_0$ .

On en déduit  $B\omega_0 = v_0$ , d'où  $B = \dots$

## Méthode 4 : trouver les CI en électricité

- ▶ Identifier les condensateurs et bobines.
- ▶ Étudier le circuit à  $t = 0^-$  (donc à  $t < 0$ , en général les générateurs sont éteints, le régime est permanent).  
En déduire  $u_{\text{condensateur}}(0^-)$  pour chaque condensateur et  $i_{\text{bobine}}(0^-)$  pour chaque bobine.
- ▶ On en déduit  $u_{\text{condensateur}}(0^+)$  pour chaque condensateur et  $i_{\text{bobine}}(0^+)$  pour chaque bobine (ce sont les mêmes qu'à  $0^-$  car  $u_{\text{condensateur}}$  et  $i_{\text{bobine}}$  fonctions continues de  $t$ ).  
Si besoin on en déduit les autres courants et tensions à  $0^+$  avec la loi des mailles ou des nœuds.
- ▶ Si besoin des dérivées à  $0^+$ , attention car elles n'ont pas de raison de valoir la même chose qu'à  $0^-$ .  
Utiliser des relations comme  $\frac{du_{\text{condensateur}}}{dt}(0^+) = \frac{i_{\text{condensateur}}(0^+)}{C}$  (avec  $i_{\text{condensateur}}(0^+)$  déterminé à l'étape précédente);  
ou  $\frac{di_{\text{bobine}}}{dt}(0^+) = \frac{u_{\text{bobine}}(0^+)}{L}$  (avec  $u_{\text{bobine}}(0^+)$  déterminé à l'étape précédente).

Exemple : le TD sur l'oscillateur LC

# Morceaux du cours

## I – Signal harmonique

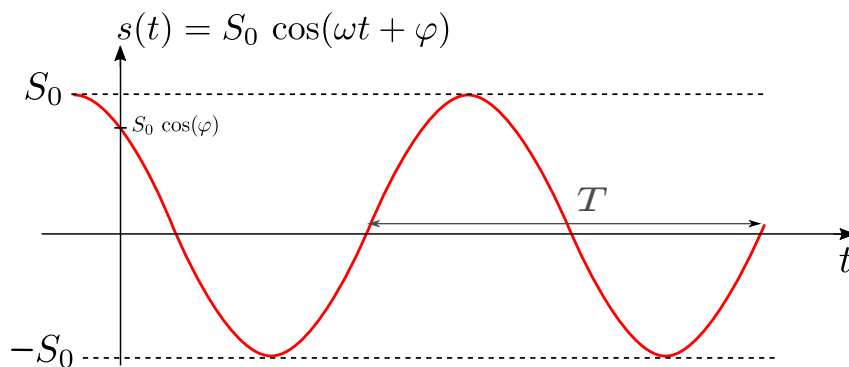
### Définition

**Signal harmonique** : signal s'écrivant comme

$$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Avec :

- $S_0$  l'amplitude,
- $\omega$  la pulsation (unité S.I. : radian par seconde, rad/s),
- $\varphi$  la phase à l'origine (unité S.I. : radian) ; elle donne la valeur initiale du signal :  $s(0) = S_0 \cos(\varphi)$ . Elle est définie à  $2\pi$  près.



### Lien entre période $T$ , fréquence $f$ et pulsation $\omega$

**Démonstration** :  $f = 1/T$  est une définition.

Par contre l'égalité  $T = 2\pi/\omega$  peut se démontrer :  $\cos(\omega(t + 2\pi/\omega) + \varphi) = \cos(\omega t + 2\pi + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi)$ , cqfd.

**Autres écritures** :

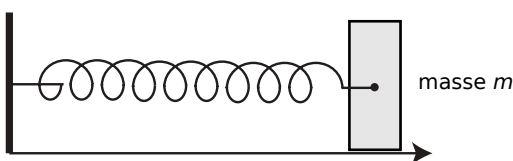
- ▶  $s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi)$
- ▶  $s(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$  (même  $\omega$  dans le cos et dans le sin)

Par abus de langage, on dit aussi parfois qu'un signal  $s(t) = S_1 + S_0 \cos(\omega t + \varphi)$  est aussi un signal harmonique, même s'il y a présence d'un terme constant  $S_1$ .

Une animation permettant de faire varier les paramètres : <https://www.geogebra.org/m/xvtS8qV8>.

## II – Le système masse-ressort décrit de façon idéale (sans frottements)

Dans toute la partie I, nous étudions l'exemple du système masse-ressort horizontal :



- La masse  $m$  glisse sur un plan.
- À l'équilibre, le ressort n'est ni étiré ni comprimé  $\rightarrow$  on note  $l_0$  sa longueur à vide (donc au repos).
- À  $t = 0$  le ressort est à l'équilibre, et on donne une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$  à la masse.

**Hypothèses** :

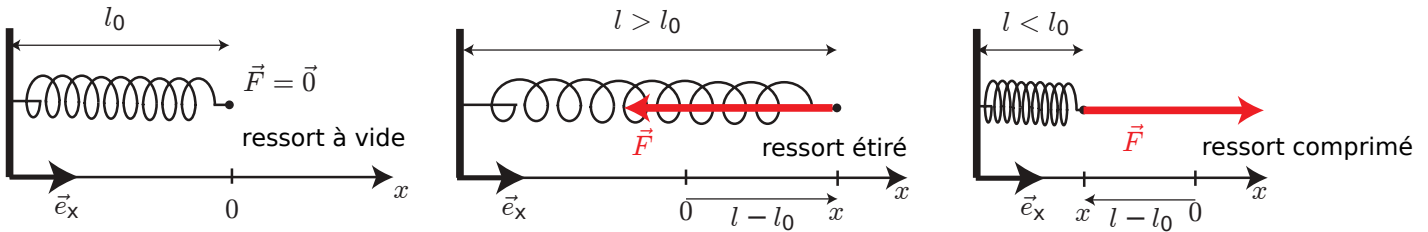
- On néglige tout frottement.
- Masse ponctuelle.
- Référentiel d'étude galiléen.

## 1 – Description d'un ressort

Modèle simplifié du ressort à spires (non jointives), de masse négligeable. Notations :

- Longueur à vide :  $l_0$ .      – Longueur totale :  $l$ .
- L'allongement du ressort est par définition :  $\Delta l = l - l_0$ .

**Action du ressort :**



- Si  $l = l_0$ , pas de force.
- Si  $l > l_0$ , ressort étiré, force qui rappelle  $M$  vers le point d'attache.
- Si  $l < l_0$ , ressort comprimé, force qui pousse  $M$ .

### Force exercée par un ressort

La force exercée sur un point  $M$  accroché à l'extrémité est proportionnelle à l'allongement  $\Delta l = l - l_0$  du ressort :

$$\vec{F} = -k(l - l_0) \vec{u}_{\text{ext}},$$

avec  $\vec{u}_{\text{ext}}$  le vecteur unitaire dirigé du point d'attache vers la masse  $M$ .

## 5 – Étude énergétique

### Notions sur l'énergie en mécanique

Énergie mécanique d'un système :

$$E_m = \underbrace{E_c}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{E_p}_{\text{énergie potentielle}}.$$

**Théorème :** en l'absence de frottement, l'énergie mécanique est constante,  $E_m = \text{cst}$ .

$$\text{On a alors } \frac{dE_m}{dt} = 0.$$

### Expressions des énergies

- Énergie cinétique :  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$
- Énergie potentielle : une par force,  $E_p = E_{p,\text{pes}} + E_{p,\text{ressort}}$ ,
- $E_{p,\text{pes}} = \pm mgz$  énergie potentielle de pesanteur.  
Signe + si l'axe  $z$  est vers le haut, signe – si l'axe  $z$  est vers le bas.
- $E_{p,\text{ressort}} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$  énergie potentielle élastique du ressort.