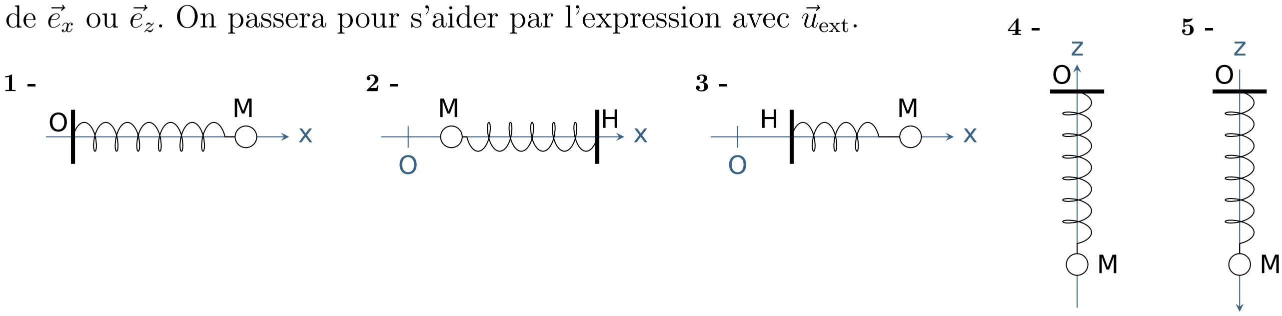
Étude des systèmes linéaires
Chapitre 2

TD – Oscillateurs harmoniques

Remarque : exercice avec ⋆ : exercice particulièrement important, à maîtriser en priorité (de même que les exemples de questions de cours des “ce qu'il faut savoir faire”)| [• ∘ ∘] : difficulté des exercices

I Vrai-faux/questions courtes ⋆ | [• ∘ ∘]

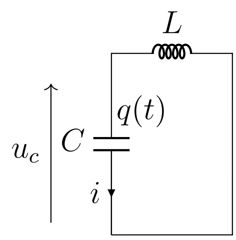
1 - Indiquer l'expression de la force de rappel du ressort dans ces différentes situations, en fonction de des caractéristiques k et l_0 du ressort, de la position x ou z du point M (repérée par rapport à l'origine en O), si nécessaire de la coordonnée x_H du point H, et de $\vec{e}_x$ ou $\vec{e}_z$. On passera pour s'aider par l'expression avec $\vec{u}_{\text{ext}}$.



2 - (V/F) Pour justifier que $\dot{u}(0) = 0$, on peut voir ce que vaut $u(0)$ et le dériver (ceci fera 0 car $u(0)$ est une constante).

II Circuit LC ⋆ | [• ∘ ∘]

On considère le circuit LC ci-contre. On s'intéresse à la charge $q(t)$ portée par l'armature du condensateur.
Pour $t < 0$ le circuit est ouvert et la charge portée par le condensateur est Q_0. À $t = 0$ on ferme le circuit, qui devient alors celui représenté ci-contre.
On prendra $L = 1.0\,\text{mH}$ et $C = 4.0\,\text{nF}$.



1 - Déterminer l'équation différentielle suivie par la charge $q(t)$.

2 - Déterminer l'équation différentielle suivie par la tension u_C aux bornes du condensateur.

3 - La résoudre.

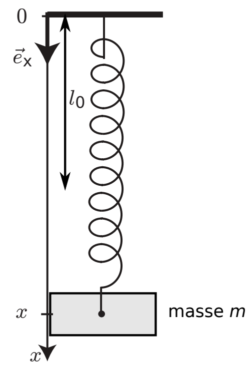
4 - Tracer l'allure de la solution.

Quelle est la période des oscillations ? Faire l'application numérique.

5 - Montrer que l'énergie totale stockée dans le circuit est constante au cours du temps.

III Système masse-ressort vertical ★ | [● ○ ○]

On considère une masse m attachée à un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. Le tout est vertical. On négligera tout frottement. On prendra $k = 40\,\mathrm{N/m}$, $m = 100\,\mathrm{g}$, $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.



1 - Déterminer l'équation différentielle suivie par la position $x(t)$.

2 - Quelle est l'expression de la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$?

3 - On pose $u(t) = x(t) - x_{\text{éq}}$. Donner l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$.

4 - La résoudre.

On considèrera qu'à l'instant initial la masse est en $x = x_{\text{éq}}+\delta$ avec δ une longueur, et on lache la masse de cette position sans vitesse initiale.

5 - Tracer l'allure de la solution.

Quelle est la période des oscillations ? Faire l'application numérique.

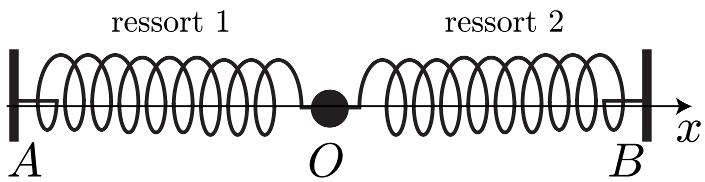
6 - On souhaite ensuite retrouver l'équation du mouvement de la question 1, mais en utilisant une approche énergétique.

Donner l'expression de l'énergie totale du système, en fonction notamment de $x(t)$ et $\dot{x}(t)$.

Utiliser le fait qu'elle est constante pour retrouver l'équation du mouvement.

IV Système à deux ressorts [● ○ ○]

Un mobile supposé ponctuel de masse m est astreint à glisser le long d'une tige horizontale de direction Ox. Ce mobile est relié par deux ressorts linéaires à deux points fixes A et B.



Les deux ressorts sont identiques (constante de raideur k, longueur à vide l_0). On néglige tout frottement et le référentiel d'étude est galiléen.
Dans la position d'équilibre, les longueurs des ressorts sont identiques et valent $l_{\text{éq}}$, et le mobile est en O. À l'instant initial, le mobile est abandonné sans vitesse d'une position x_0.

1 - Établir l'équation différentielle dont $x(t)$ est solution.

2 - Montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation ω_0 et la période T_0 en fonction de k et m.

3 - Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales.

4 - Donner les expressions de l'énergie potentielle élastique des deux ressorts, de l'énergie cinétique du mobile, et de l'énergie mécanique totale $E_m(t)$ en fonction de k, x_0, ω_0, t et éventuellement l_0 et $l_{\text{éq}}$. Par convention l'origine de l'énergie potentielle correspondra à la position d'équilibre : $E_p = 0$ pour $x = 0$.

V Vibration d'une molécule de HCl [● ● ○]

La fréquence de vibration de la molécule de chlorure d'hydrogène HCl est mesurée par spectroscopie comme valant $f = 8{,}5 \times 10^{13}\,\mathrm{Hz}$. On aborde dans cet exercice un premier modèle simple de la molécule, décrite comme un atome d'hydrogène mobile relié à un atome de chlore fixe. L'interaction entre les deux atomes est modélisée par un pseudo-ressort de raideur k.

Données : masses molaires $M_\mathrm{H} = 1{,}0\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ et $M_\mathrm{Cl} = 35{,}5\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$, constante d'Avogadro $N_A = 6{,}0 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$.

1 - Pourquoi est-il raisonnable de supposer l'atome de chlore fixe ?

2 - Calculer la raideur k.

3 - On admet (mécanique quantique) que l'énergie de la molécule est égale à $\frac{1}{2}hf$ où $h = 6{,}62 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$ est la constante de Planck. La référence de l'énergie potentielle est prise nulle lorsque le ressort est à l'équilibre immobile. Calculer la vitesse maximale de l'atome d'hydrogène.

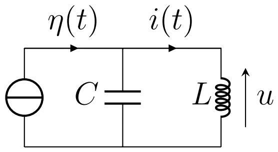
4 - Calculer l'amplitude de son mouvement. Comparer à la longueur $d = 127\,\mathrm{pm}$ tabulée de la liaison H-Cl.

Étude des systèmes linéaires
Chapitre 2

DM – Circuit LC, étude énergétique

DM facultatif

I Circuit LC et étude énergétique



Dans le circuit ci-contre, le générateur supposé idéal est brusquement éteint (ce qui revient à ouvrir la branche du circuit contenant le générateur). On modélise ceci par un échelon de courant, $\eta(t)$ passant de I_0 à 0 à l'instant $t = 0$. On appelle $\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$ l'énergie électrique totale stockée dans le condensateur et la bobine.

1 - Exprimer $\mathcal{E}_{\text{tot}}$ en fonction de i et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

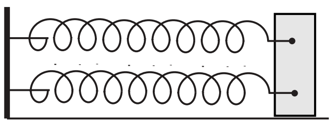
2 - Justifier qualitativement que $\mathcal{E}_{\text{tot}}$ est constante. En déduire l'équation différentielle vérifiée par i.

Retrouver cette équation par application des lois de Kirchhoff.

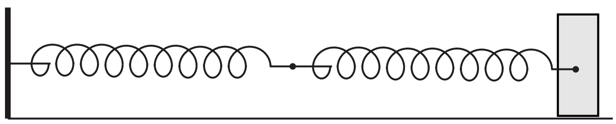
3 - Établir les conditions initiales sur i et sa dérivée.

4 - En déduire l'expression de $i(t)$.

II Association de ressorts



association en parallèle



association en série

Association de deux ressorts en parallèle

On considère deux ressorts mis côte à côte et utilisés ensembles. Ils sont chacun de raideur k et de longueur à vide l_0, et on néglige leur masse. On note l_0' la longueur à vide de l'association des deux ressorts, et l' l'allongement de l'ensemble.

1 - Montrer que les deux ressorts sont équivalents à un seul ressort, de longueur à vide l_0' à exprimer en fonction de l_0 et de raideur k' à exprimer en fonction de k.

Association de deux ressorts en série

On considère cette fois les deux ressorts mis bout à bout. On note l_0' la longueur à vide de l'association des deux ressorts, et l' l'allongement de l'ensemble.

2 - Même question que précédemment.