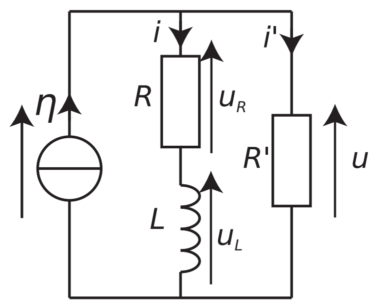
Partie V : Étude des systèmes linéaires
Chapitre 1

Correction – DM 6 – Charge d'une bobine en dérivation



1 - ⋆ Pour $t<0$ on a $i=i'=0$ car aucune source n'alimente le circuit. Donc $\boxed{i(0^-)=0}$ et $\boxed{i'(0^-)=0.}$

⋆ L'intensité traversant une bobine étant continue, on a $\boxed{i(0^+)=i(0^-)=0.}$

⋆ Pour i' : avec la loi des nœuds appliquée à $t=0^+$ on en déduit $\boxed{i'(0^+)=I_0-i(0^+)=I_0.}$

On remarque que $i'(t)$ n'est pas continue en $t=0$ (il passe de 0 à I_0). Rien d'étonnant, il ne s'agit pas du courant traversant une bobine, il peut donc être continu ou non.

2 - ⋆ Loi des nœuds : $I_0=i+i'$.

⋆ Loi des mailles : $u=u_R+u_L$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ R'i'=Ri+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\\
&\Rightarrow\ R'(I_0-i)=Ri+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\\
&\Rightarrow\ R'I_0=(R'+R)i+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\\
&\Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{R'+R}{L}i=\frac{R'I_0}{L}\\
&\Rightarrow\ \boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{i}{\tau}=\frac{R'I_0}{L}\quad\text{avec}\quad \tau=\frac{L}{R+R'}.}
\end{aligned}$$

L'unité de τ est la seconde.

3 - Il faut résoudre l'équation précédente.

⋆ Solution de l'équation homogène : $i_H(t)=A\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

⋆ Solution particulière : elle est constante, donc $\dfrac{\mathrm{d}i_P}{\mathrm{d}t}=0$ et il reste $\dfrac{i_P}{\tau}=\dfrac{R'I_0}{L}$, d'où $i_P=\tau\,\dfrac{R'I_0}{L}=\dfrac{R'I_0}{R+R'}$.

⋆ D'où la solution générale : $i(t)=i_H(t)+i_P=A\mathrm{e}^{-t/\tau}+\dfrac{R'I_0}{R+R'}$.

⋆ Constante d'intégration : on sait que $i(0^+)=0$, or $i(0^+)=A+\dfrac{R'I_0}{R+R'}$, donc $A=-\dfrac{R'I_0}{R+R'}$.

⋆ Finalement : $i(t)=-\dfrac{R'I_0}{R+R'}\mathrm{e}^{-t/\tau}+\dfrac{R'I_0}{R+R'}$, soit encore : $\boxed{i(t)=\dfrac{R'I_0}{R+R'}\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right).}$

4 - Allure de $i(t)$: