Partie I : Signaux et ondes
Chapitre 1

CorrectionTD – Signal et spectre

I Vrai-faux/questions courtes [● ○ ○]

1 - $T = 1/f$, $\omega = 2\pi f$. $[T] = \mathrm{s}$, $[f] = \mathrm{s}^{-1}$, $[\omega] = \mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

2 - Vrai. La moyenne est une opération linéaire.

3 - Faux.

III Calculs de valeur moyenne ⋆ | [● ○ ○]

Pour chacun des signaux périodiques suivants, donner leur période T, et calculer leur valeur moyenne $\langle s(t) \rangle$.

1 - $s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

Période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

$$\begin{aligned}
\langle s(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T s_0 \cos(\omega t + \varphi) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T} s_0 \int_0^T \cos(\omega t + \varphi) \mathrm{d}t \\
&= \frac{s_0}{T} \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) \right]_0^T \\
&= \frac{s_0}{T} \frac{1}{\omega} \left(\sin(\omega T + \varphi) - \sin(\varphi) \right) \\
&= \frac{s_0}{T} \frac{1}{\omega} \left(\sin(2\pi + \varphi) - \sin(\varphi) \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2 - $s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi)$.

Période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

$$\begin{aligned}
\langle s(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T s_0 \sin(\omega t + \varphi) \mathrm{d}t \\
&= \frac{s_0}{T} \int_0^T \sin(\omega t + \varphi) \mathrm{d}t \\
&= \frac{s_0}{T} \left[-\frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) \right]_0^T \\
&= -\frac{s_0}{T} \frac{1}{\omega} \left(\cos(\underbrace{\omega T}_{=2\pi} + \varphi) - \cos(\varphi) \right) \\
&= -\frac{s_0}{T} \frac{1}{\omega} \left(\underbrace{\cos(2\pi + \varphi)}_{=\cos\varphi} - \cos(\varphi) \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

3 - $s(t) = s_0 \cos^2(\omega t + \varphi)$.

Pour obtenir la période il faut se débarrasser du carré en utilisant la formule

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1, \quad \text{soit donc} \quad \cos^2 x = \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 \frac{\cos[2(\omega t + \varphi)]}{2} + s_0 \frac{1}{2}, \\ &= \frac{s_0}{2} \cos[2\omega t + 2\varphi] + \frac{s_0}{2}, \end{aligned}$$

et on voit donc qu'on a un signal harmonique (décalé) de période $T = \dfrac{2\pi}{2\omega} = \dfrac{\pi}{\omega}$.

Calculons ensuite la valeur moyenne :

$$\begin{aligned} \langle s(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T s_0 \cos^2(\omega t + \varphi) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{s_0}{2} \cos[2\omega t + 2\varphi] + \frac{s_0}{2} \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{s_0}{2} \cos[2\omega t + 2\varphi] \mathrm{d}t + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{s_0}{2} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T} \frac{s_0}{2} \int_0^T \cos[2\omega t + 2\varphi] \mathrm{d}t + \frac{1}{T} \frac{s_0}{2} \int_0^T \mathrm{d}t \\ &= \frac{s_0}{2T} \left[\frac{1}{2\omega} \sin[2\omega t + 2\varphi] \right]_0^T + \frac{s_0}{2T}(T - 0) \\ &= \frac{s_0}{2T} \frac{1}{2\omega} \left(\sin[2 \underbrace{\omega T}_{=2\pi} + 2\varphi] - \sin(2\varphi) \right) + \frac{s_0 T}{2T} \\ &= \frac{s_0}{2T} \frac{1}{2\omega} \left(\underbrace{\sin[2 \times 2\pi + 2\varphi]}_{=\sin(2\varphi)} - \sin(2\varphi) \right) + \frac{s_0}{2} \\ &= \frac{s_0}{2} \end{aligned}$$

4 - $s(t) = s_0 \sin^2(\omega t + \varphi)$.

On utilise cette fois :

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x, \quad \text{soit donc} \quad \sin^2 x = -\frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} s(t) &= -s_0 \frac{\cos[2(\omega t + \varphi)]}{2} + s_0 \frac{1}{2}, \\ &= -\frac{s_0}{2} \cos[2\omega t + 2\varphi] + \frac{s_0}{2}, \end{aligned}$$

et on voit donc qu'on a un signal harmonique (décalé) de période $T = \dfrac{2\pi}{2\omega} = \dfrac{\pi}{\omega}$.

Pour la valeur moyenne on reprend presque exactement les calculs du 2, à un signe moins près mais sans importante car en facteur du terme nul. On a donc encore $\langle s(t) \rangle = \dfrac{s_0}{2}$.

5 - $s(t) = 3 + 8\cos(\omega t + \pi/2)$.

Période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

$$
\begin{aligned}
\langle s(t)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(3+8\cos(\omega t+\pi/2)\right)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{T}\int_0^T 3\mathrm{d}t + \int_0^T 8\cos(\omega t+\pi/2)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{T}\int_0^T 3\mathrm{d}t + 8\underbrace{\int_0^T \cos(\omega t+\pi/2)\mathrm{d}t}_{=0}\\
&= \frac{1}{T}3T\\
&= 3.
\end{aligned}
$$