Fiche méthode

Analyse dimensionnelle

Ce qu'il faut connaître

►₁ Quelles sont les sept unités de base du système international (S.I.) ?

Ce qu'il faut savoir faire

►₂ Déterminer la dimension ou l'unité d'une expression dans le système international. → exercice 1

►₃ Vérifier si une formule est homogène. → exercice 2

►₄ Déterminer l'expression d'une grandeur par analyse dimensionnelle (écriture du type $E = kA^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma}...$). → exercice 3

I Grandeurs physiques et mesures, rôle des unités

Définition

Grandeur physique : C'est une propriété d'un phénomène, d'un évènement, d'un corps, que l'on peut exprimer par une mesure.

Exemples : la position, la vitesse, la pression, la température, la masse, la charge électrique, une force...

Définition

Mesure : Une mesure est l'attribution, à une grandeur physique, d'une valeur numérique et d'une unité.

Prenons par exemple une table et mesurons sa longueur : $L = 122\,\mathrm{cm}$.

Ceci signifie que la longueur L est la répétition de 122 fois l'unité "cm" (centimètre).

Ceci permet donc de connaître L.

La valeur numérique (ici 122) dépend de l'unité. On a par exemple $L = 122\,\mathrm{cm} = 1,22\,\mathrm{m} = 48,0\,\mathrm{pouce}$.
Ainsi, écrire $L = 122$ ne permet pas de savoir ce que mesure L : est-ce 122 mètres ? centimètres ? pouces ?
→ L'écriture d'un résultat numérique sans unité n'a aucun sens.

→ **On n'oubliera jamais de noter l'unité d'un résultat numérique.**

II Des unités utilisées dans le monde entier : le S.I.

II.1 Unités de base

Il est nécessaire, pour le bon déroulement des échanges techniques, commerciaux, scientifiques, que les unités de mesure soient définies une fois pour toute et de la même façon partout. Un mètre doit valoir la même chose en France et en Australie. C'est le Système International d'unités (ou S.I.) qui est utilisé presque partout. Il définit sept unités de base, listées ci-dessous.

Grandeur de base	Dimensio	Unité de base
Durée (ou temps)	T	seconde (s)
Longueur	L	mètre (m)
Masse	M	kilogramme (kg)
Intensité électrique	I	ampère (A)
Température thermodynamique	Θ	kelvin (K)
Quantité de matière	N	mole (mol)
Intensité lumineuse	J	candela (cd)

Notation

On note entre crochets la dimension ou l'unité d'une grandeur. Par exemple si l est une longueur : $[l] = \text{m}$, si m_0 est une masse : $[m_0] = \text{kg}$, etc.

Remarque :

- En toute rigueur, la dimension et l'unité de base sont deux choses différentes.

  Par exemple si L est la largeur d'une table, la dimension de L est celle d'une longueur, et son unité (de base) est le mètre.

  On peut soit raisonner avec les dimensions, soit avec les unités (de base), cela revient au même.

- L'intensité lumineuse est une mesure de l'intensité perçue par un œil humain moyen. Par exemple les emballages d'ampoules électriques précisent l'intensité lumineuse délivrée par l'ampoule en lumen, le lumen correspondant à l'intensité émise par une source de un candela dans un angle solide donné. Nous n'en parlerons pas en CPGE.

- Attention, l'unité de base de la masse est le kilogramme, et non pas le gramme.

II.2 Unités dérivées

Les unités des grandeurs qui ne figurent pas dans le tableau ci-dessus doivent être obtenues en utilisant des relations physiques.

> **Exemples :**
> Prenons la relation de définition de la vitesse pour un mouvement à vitesse constante :
>
> $$v = \frac{d}{t}.$$
>
> En terme d'unités dans le S.I., on a donc :
>
> $$[v] = \frac{[d]}{[t]} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

$\rightsquigarrow_1$ De même, donner l'unité de la force dans le S.I., ainsi que celle de l'énergie.

$\rightsquigarrow_2$ Nous avons raisonné avec les unités. Qu'est-ce que cela donne si on utilise les dimensions ? Reprendre les exemples de la vitesse, de la force et de l'énergie.

II.3 Règles générales pour trouver l'unité d'une grandeur

> **Méthode : Trouver l'unité d'une grandeur dans le S.I.**
>
> - Si la grandeur est une des sept grandeurs de base, alors l'unité est l'unité associée (s, m, kg, A, K, mol, cd).
> - Si ce n'est pas le cas, alors il faut chercher une relation qui fait intervenir la grandeur étudiée.
>
>   **Exemples :** Pour l'énergie, $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, ou $E_p = mgz$. Pour la vitesse, $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, pour une force $\vec{F} = m\vec{a}$, etc.
> - On utilise ensuite les règles suivantes :
>   - $[A \times B] = [A] \times [B]$, $\quad \left[\frac{A}{B}\right] = \frac{[A]}{[B]}$, $\quad [A^n] = [A]^n$
>   - Un nombre pur n'a pas d'unité ni de dimension. On dit qu'elle vaut 1.
>   Exemples : $[34] = 1$, $[2\pi] = 1$.
>   - L'unité S.I. d'angle est le radian. Cette unité ne compte pas dans les bilans dimensionnels.

- S'il y a des quantités infinitésimales, on n'oublie pas leur unité.
  Par exemple $[\mathrm{d}x] = \mathrm{m}$, $[\mathrm{d}t] = \mathrm{s}$.
  Ceci ne dépend pas de l'ordre de l'infiniment petit : $[\mathrm{d}^2x] = \mathrm{m}$.
- S'il y a une dérivée, il ne faut pas oublier de diviser par l'unité de ce par rapport à quoi on dérive.
  Exemples : $\left[\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right] = \dfrac{[\mathrm{d}x]}{[\mathrm{d}t]} = \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, ou encore $\left[\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right] = \dfrac{[\mathrm{d}^2x]}{[\mathrm{d}t]^2} = \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.
- S'il y a une intégrale, on n'oublie pas l'unité de ce par rapport à quoi on intègre.
  Exemple : $\left[\int_0^T t^2\mathrm{d}t\right] = [t]^2 \times [\mathrm{d}t] = \mathrm{s}^3$.

- Et on répète la procédure jusqu'à n'avoir plus que des unités parmi les sept de base.

III Homogénéité : un outil de vérification des équations

Définition

Une relation est dite homogène lorsque :

- les grandeurs de chaque côté du signe égal ont la même dimension (s'expriment dans la même unité),
- s'il y a une somme ou une soustraction, alors chaque terme à la même dimension,
- les arguments des fonctions cos, sin, exp, ln, etc., sont sans dimension.

Ainsi, dans une expression comme $A = B + C$, on doit nécessairement avoir $[A] = [B] = [C]$.

Propriété

Les relations de base utilisées en physique sont toujours homogènes. De plus, une suite de calculs préserve toujours cette homogénéité.

→ si vous aboutissez à une expression non homogène, c'est que vous avez commis une erreur.

$\rightsquigarrow_3$ **Exemple :**

- Après calcul, un étudiant aboutit à l'expression suivante de la vitesse de chute d'un objet : $v = gt^2$, avec g l'accélération de la pesanteur et t le temps. Cette expression est-elle homogène ?

IV Prédiction d'un résultat par analyse dimensionnelle

Une autre utilisation de l'analyse dimensionnelle est la prédiction de relations.

$\rightsquigarrow_4$ Prenons un exemple : On étudie la chute libre d'un objet de masse m dans un champ de pesanteur g. On néglige tout frottement. On souhaite obtenir le temps T de chute d'une hauteur h.
Les étapes à suivre sont toujours les mêmes :

a. On isole la grandeur dont on cherche l'expression (ici le temps T), et on liste les paramètres dont cette grandeur peut dépendre. Ici elle peut dépendre de g, m et h.

b. On écrit les unités de ces grandeurs dans le S.I.

c. On écrit la grandeur recherchée sous la forme $T = k\, m^\alpha g^\beta h^\gamma$, où k est une constante sans dimension.

   Puis on impose à la relation d'être homogène afin de trouver les valeurs des exposants.

V Exercices pour s'entraîner

V.1 Déterminer la dimension ou l'unité d'une expression dans le système international

Déterminer l'unité S.I. d'un volume V , d'une surface S, d'une masse volumique ρ, d'une accélération a et d'une force F.

V.2 Vérifier si une formule est homogène

Lors d'un devoir, un élève aboutit à ces expressions. Vérifier l'homogénéité et proposer une correction. x, l, R, r et z sont des distances, g est l'accélération de la pesanteur terrestre, t et τ sont des temps, ω est une pulsation et v_0 une vitesse.

1 - La vitesse v est $v = 1 + \exp(-t/\tau)$.

2 - La surface S est $S = \pi(R + r^2)$.

3 - La distance est $d = l_0(1 + \cos(\omega t))$.

4 - L'altitude est $z = \dfrac{1}{2}gt^2 + \dfrac{t}{v_0}$.

V.3 Déterminer l'expression d'une grandeur par analyse dimensionnelle

On considère un pingouin au sommet d'un igloo, qui s'élance (sans vitesse initiale) pour glisser. Il finit par décoller de l'igloo avant de toucher le sol. On néglige les frottements.
L'angle à partir duquel le pingouin décolle dépend-il du rayon de l'igloo ? De la masse du pingouin ? On répondra par analyse dimensionnelle, en commençant par lister les grandeurs dont peut dépendre cet angle.