

Équations différentielles d'ordre 1 et 2

Cette fiche aborde uniquement les équations différentielles *linéaires à coefficients constants* d'ordre 1 et 2. C'est souvent ce type d'équations que vous rencontrerez en physique-chimie en CPGE.

Attention toutefois, en mathématiques vous manipulerez régulièrement des équations non linéaires (par exemple $y^2 + y = 0$) ou à coefficients non constants (par exemple $y'(t) + ty(t) = 0$), et les résultats présentés ici ne s'appliquent pas.

I Résolution de $y' + y/\tau = b$

a/ Ce qu'il faut connaître

Équation	Solution
<p>Équation homogène :</p> $\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = 0$	$u(t) = A e^{-t/\tau}$ <p>A est une constante réelle, qui peut être obtenue avec la condition initiale $u(t = 0)$.</p>
<p>Équation avec second membre constant :</p> $\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = \frac{E}{\tau}$	$u(t) = u_H(t) + u_P(t),$ avec : <ul style="list-style-type: none"> ▶ $u_H(t) = A e^{-t/\tau}$ solution de l'équation homogène, ▶ $u_P = E$ solution particulière de l'équation. <p>Attention : la constante A se détermine avec la solution totale $u(t = 0) = A + u_P(t = 0)$, et certainement pas avec $u_H(t = 0)$.</p> <p>Rq : si le second membre est sinusoïdal, du type $\alpha \cos \omega t$, alors la solution particulière est celle du régime sinusoïdal forcé (étude en complexes).</p>

Voir ce site pour un tableau un peu plus complet, et surtout pour les liens vers des animations de systèmes vérifiant ces équations (charge et décharge de condensateur, etc.) : http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/equadiff/equadif/ordre1.html (le lien est aussi sur le site de la classe, rubrique "TP, DS, maths...").

b/ Exercices pour s'entraîner

↪₁ Dans les exemples ci-dessous, écrire la forme générale des solutions.

- a. $f'(x) + af(x) = 0$ avec a constant.
- b. $\dot{u} + \frac{u(t)}{\tau} = 0$ avec τ constant.
- c. $\dot{u} + \frac{u(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ avec E et τ constants.

d. $\frac{di}{dt} = \alpha i(t) + \beta$ avec α et β constants.

e. $\frac{dT}{ds} = \frac{T(s)}{c_p}$ avec c_p constant.

Réponses :

a. $f(x) = C \exp(-ax)$ b. $u(t) = C \exp(-t/\tau)$ c. $u(t) = C \exp(-t/\tau) + E$

d. $i(t) = C \exp(\alpha t) - \beta/\alpha$ e. $T(s) = C \exp(s/c_p)$

II Résolution de $y'' + (\omega_0/Q)y' + \omega_0^2 y = c$ _____

a/ Ce qu'il faut connaître

Remarque : les équations du second ordre font intervenir deux constantes d'intégration. Il faut donc deux conditions initiales pour les déterminer, en générale une sur $u(t = 0)$ et une sur $u'(t = 0)$.

Sur le même site que précédemment, mais pour les systèmes du 2^e ordre : http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/equadiff/equadif/ordre2.html (le lien est aussi sur le site de la classe, rubrique "TP, DS, maths...").

Équation	Solution
<p>Équation de type oscillateur harmonique (donc sans frottement), homogène :</p> $\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0$	$u(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t),$ <p>Détermination de A et B :</p> <p>Supposons que l'on connaisse $u(t = 0) = u_0$ et $u'(t = 0) = u_1$.</p> <ul style="list-style-type: none"> - On a alors $u_0 = u(t = 0) = A$, - Pour $u'(t = 0)$ il faut d'abord calculer $u'(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$, puis prendre la valeur à $t = 0$: $u'(t = 0) = B\omega_0$. On a donc $u_1 = B\omega_0$ et donc $B = u_1/\omega_0$. <p>Rq : on peut aussi avoir la solution sous la forme $u(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$, avec A et φ des constantes à déterminer (même méthode).</p>
<p>Équation de type oscillateur harmonique (donc sans frottement), avec second membre :</p> $\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = \alpha$	$u(t) = u_H(t) + u_P(t),$ avec : <ul style="list-style-type: none"> ▶ $u_H(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ solution de l'équation homogène, ▶ $u_P = \alpha/\omega_0^2$ solution particulière de l'équation.

Remarque : Ici comme dans les autres cas, l'expression de la solution particulière n'est pas à connaître. Il faut la trouver en supposant qu'elle est constante : dans ce cas, tous les termes en dérivée de u sont nuls, et on isole simplement u .

Ici ceci donne :

$$0 + \omega_0^2 u_P = \alpha \quad \text{d'où} \quad u_P = \alpha/\omega_0^2.$$

Équation	Solution
<p>Équation avec frottement (terme du/dt), homogène :</p> $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$ <p>ou en S.I. :</p> $\frac{d^2u}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$	<p>Équation caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$,</p> <p>de discriminant $\Delta = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right) = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1)$.</p> <p>Solution :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ Si $Q < 1/2$ (soit $\xi > 1$) : <u>régime apériodique</u>. Les racines r_1 et r_2 du polynôme sont réelles. On a $u(t) = A \exp(r_1 t) + B \exp(r_2 t)$. ▶ Si $Q = 1/2$ (soit $\xi = 1$) : <u>régime critique</u>. $\Delta = 0$ et une seule racine (double) $r_1 = -\omega_0$. On a $u(t) = (At + B) \exp(-\omega_0 t)$. ▶ Si $Q > 1/2$ (soit $\xi < 1$) : <u>régime pseudo-périodique</u>. Les racines r_1 et r_2 du polynôme sont complexes conjugués, $r_1 = -\lambda + j\Omega$ et $r_2 = -\lambda - j\Omega$ avec $\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$ et $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$. On a $u(t) = \exp(-\lambda t) [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$. <p>Rq 1 : Q donne une idée du nombre d'oscillations dans le régime pseudo-périodique (donc de la durée du transitoire, qui est $Q \times T_0$).</p> <p>Rq 2 : Pour le régime pseudo-périodique, on peut aussi écrire la solution sous la forme $u(t) = \exp(-\lambda t) A \cos(\omega t + \varphi)$.</p>
<p>Équation avec frottement et avec second membre constant :</p> $\frac{d^2u}{dt^2} + 2\lambda \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \alpha$ <p>ou</p> $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \alpha$	<p>$u(t) = u_H(t) + u_P(t)$, avec :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ $u_H(t)$ solution de l'équation homogène (voir au dessus), ▶ $u_P = \alpha/\omega_0^2$ solution particulière de l'équation. <p>Rq : si le second membre est sinusoïdal, du type $\alpha \cos \omega t$, alors la solution particulière est celle du régime sinusoïdal forcé (étude en complexes).</p>

b/ Exercices pour s'entraîner

↪₂ L'équation différentielle régissant les oscillations d'une masse accrochée à un ressort est $m\ddot{x} = -kx$, $k > 0$. Écrire les solutions de cette équation, sachant qu'à $t = 0$ on a $x = x_0$ et une vitesse nulle.

↪₃ On considère maintenant que la masse oscille dans un milieu où les frottements ne peuvent plus être négligés. On a donc $m\ddot{x} = -kx - f\dot{x}$ avec $k, f > 0$. Donner l'expression de f à partir de laquelle il n'y aura plus du tout d'oscillations.