Partie II : Thermodynamique et mécanique des fluides
Chapitre 4

Correction – DM 7 – Transformations infinitésimales : gaz chauffé par une résistance

1. Puissance électrique reçue : $\boxed{P_{\text{élec}} = UI = RI^2.}$

Le travail correspondant, reçu pendant un temps $\mathrm{d}t$, est donc $\boxed{\delta W_{\text{élec}} = P_{\text{élec}}\mathrm{d}t = RI^2\mathrm{d}t.}$

Cas 1 : volume constant

2. On applique le premier principe au système {gaz + résistance + enceinte} entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q_{\text{reçu}}.$$

Ici on a $\delta Q_{\text{reçu}} = 0$ car le système est calorifugé.

Et $\delta W = \delta W_{\text{pression}} + \delta W_{\text{élec}}$. Or le volume étant constant, on a $\delta W_{\text{pression}} = 0$.

On a ici $\mathrm{d}U = \mathrm{d}U_{\text{gaz}}$ ($+\mathrm{d}U_{\text{résistance}} + \mathrm{d}U_{\text{enceinte}}$ que l'on néglige), avec pour un gaz parfait : $\mathrm{d}U = C_v\mathrm{d}T$.

Finalement on obtient $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \dfrac{RI^2}{C_v}$. Avec l'expression de R ceci devient : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \dfrac{R_0I^2}{C_p}\dfrac{T}{T_0}.}$

On pose alors $\tau = \dfrac{C_vT_0}{R_0I^2}$, pour avoir $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \dfrac{T}{\tau}.}$

On voit sur cette équation que τ a la même unité que $\mathrm{d}t$, c'est-à-dire un temps.

Remarque : Si on applique le premier principe au système {gaz} seulement, alors $\delta W = \delta W_{\text{pression}} = 0$, mais $\delta Q = RI^2\mathrm{d}t$ car le gaz reçoit un transfert thermique de la part de la résistance. La suite de la démonstration mène au même résultat.

Cela revient donc au même. En revanche si on ne néglige pas la capacité calorifique de l'enceinte et de la résistance, il est beaucoup plus simple de raisonner sur le système {gaz + résistance + enceinte}.

3. On intègre l'équation précédente : $T(t) = A\mathrm{e}^{t/\tau}$, avec $A = T_0$ (pour $t = 0$).

D'où $\boxed{T(t) = T_0\,\mathrm{e}^{t/\tau}.}$

Cas 2 : pression constante

On recommence, mais cette fois on laisse le piston libre de glisser, et on néglige tout frottement. On suppose que le chauffage est suffisamment lent pour que le piston soit à l'équilibre mécanique à tout instant.

4. Le premier principe avec l'enthalpie, pour une évolution infinitésimale, s'écrit

$$\mathrm{d}H = \delta W' + \delta Q,$$

avec $\delta W'$ les travaux autres que ceux des forces de pression. Il est valide si :

– la transformation est isobare

– OU si la transformation est monobare avec $p_{\text{initial}} = p_{\text{final}} = p_{\text{extérieur}}$.

5. Le piston étant toujours à l'équilibre mécanique, et tous les frottements étant négligés, on a à chaque instant $p = p_0$. La transformation est donc **isobare**.

On peut donc appliquer le premier principe avec H rappelé ci-dessus.

On applique au système {gaz + résistance + enceinte} entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}H = \delta W' + \delta Q_{\text{reçu}}.$$

Ici on a $\delta Q_{\text{reçu}} = 0$ car le système est calorifugé.

On a $\delta W'$ qui est, dans cette version du premier principe, le travail autre que celui des forces de pression. Ici il s'agit du travail électrique fourni à la résistance : $\delta W' = \delta W_{\text{élec}} = RI^2\mathrm{d}t$.

On a ici $\mathrm{d}H = \mathrm{d}H_{\text{gaz}}$ ($+\mathrm{d}H_{\text{résistance}} + \mathrm{d}H_{\text{enceinte}}$ que l'on néglige), avec pour un gaz parfait : $\mathrm{d}H = C_p\mathrm{d}T$ (C_p la capacité thermique totale du gaz).

Finalement on obtient $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \dfrac{RI^2}{C_p}$. Avec l'expression de R ceci devient : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \dfrac{R_0I^2}{C_p}\dfrac{T}{T_0}.}$

On pose alors $\tau = \dfrac{C_pT_0}{R_0I^2}$, pour avoir $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \dfrac{T}{\tau}.}$

Remarque : Si on applique le premier principe au système {gaz} seulement, alors $\delta W' = 0$, et $\delta Q = RI^2\mathrm{d}t$. La suite est identique.

6. On intègre l'équation précédente : $T(t) = A\mathrm{e}^{t/\tau}$, avec $A = T_0$ (pour $t = 0$).

D'où $\boxed{T(t) = T_0\,\mathrm{e}^{t/\tau}.}$

7. Gaz parfait donc $V = \dfrac{nRT}{p}$.

Or ici $p = p_0$ est constant, n également car le système est fermé.

D'où $V(t) = \dfrac{nR}{p_0}T_0\,\mathrm{e}^{t/\tau}$.

On reconnait $V_0 = \dfrac{nR}{p_0}T_0$, donc finalement $\boxed{V(t) = V_0\,\mathrm{e}^{t/\tau}.}$

Retour au cas 1 et calcul de l'entropie créée

8. On considère encore le système {gaz + résistance + enceinte} entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.

On a $\delta Q = 0$, donc $\delta S_e = 0$.

Le second principe indique donc que $\delta S_c = \mathrm{d}S$.

On utilise l'expression fournie $\mathrm{d}S = \mathrm{d}S_{\text{gaz}} = C_v\dfrac{\mathrm{d}T}{T}$ (on ne considère que le gaz, car on néglige les variations d'entropie de la résistance et de l'enceinte car leurs C_v sont négligés), pour avoir $\boxed{\delta S_c = C_v\dfrac{\mathrm{d}T}{T}.}$

9. On a vu dans la partie précédente que $C_v\mathrm{d}T = \mathrm{d}U = \delta W_{\text{élec}}$, donc on a $\delta S_c = C_v\dfrac{\mathrm{d}T}{T} = \dfrac{\delta W_{\text{élec}}}{T}$.

D'où $\boxed{T\delta S_c = \delta W_{\text{élec}}.}$