Fiche méthode
Mathématiques

Nombres complexes

On note a et b des réels, $\underline{z}$, $\underline{z}_1$ et $\underline{z}_2$ des complexes.

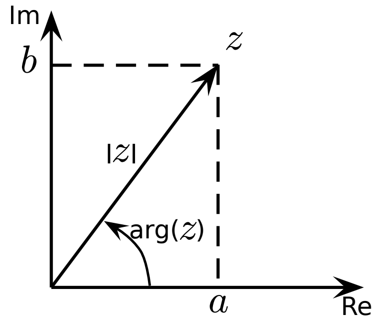
Partie réelle et imaginaire

Soit $\underline{z} = a + \mathrm{j}b$.
On a $\mathrm{Re}(\underline{z}) = a$, et $\mathrm{Im}(\underline{z}) = b$.

Interprétation géométrique

Soit $\underline{z} = a + \mathrm{j}b$.
On se place dans le plan complexe. On peut associer au nombre complexe $\underline{z}$ un vecteur, dont :

- a et b sont les coordonnées cartésiennes,
- $|\underline{z}|$ est la norme,
- $\arg(\underline{z})$ est l'angle entre l'axe des abscisses et le vecteur représentant $\underline{z}$.



On voit sur le dessin qu'on a les valeurs particulières suivantes :

$$\boxed{\arg(1) = 0, \quad \arg(-1) = \pi, \quad \arg(\mathrm{j}) = \pi/2, \quad \arg(-\mathrm{j}) = -\pi/2.}$$

Module

• Propriétés :

$$\boxed{|\underline{z}_1\,\underline{z}_2| = |\underline{z}_1| \times |\underline{z}_2|, \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right| = \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|}.}$$

• Calcul : pour $\underline{z} = a + \mathrm{j}b$ on a

$$\boxed{|a + \mathrm{j}b| = \sqrt{a^2 + b^2}.}$$

Argument

• Propriétés :

$$\boxed{\arg(\underline{z}_1\,\underline{z}_2) = \arg(\underline{z}_1) + \arg(\underline{z}_2), \qquad \text{et} \qquad \arg(\underline{z}_1/\underline{z}_2) = \arg(\underline{z}_1) - \arg(\underline{z}_2).}$$

• Calcul : On a, <u>à condition que $a > 0$</u> :

$$\boxed{\arg(a + \mathrm{j}b) = \arctan\frac{b}{a}.}$$

En physique on a quasiment toujours $a > 0$ et il suffit de retenir la formule ci-dessus. Cela dit, si jamais $a < 0$, on écrit :

$$\begin{aligned}
\arg(a + \mathrm{j}b) &= \arg[(-1)(-a - \mathrm{j}b)] \\
&= \arg(-1) + \arg(-a - \mathrm{j}b) \\
&= \pi + \arctan\frac{-b}{-a} \qquad \text{car } \arg(-1) = \pi \\
&= \pi + \arctan\frac{b}{a}
\end{aligned}$$

• Valeurs particulières : si $a > 0$ est un réel positif, on a

$$\boxed{\begin{aligned} \arg(a) &= 0 \\ \arg(-a) &= \pi \\ \arg(a\mathrm{j}) &= \frac{\pi}{2} \\ \arg(-a\mathrm{j}) &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}}$$

Exponentielle complexe

• Exponentielle d'un imaginaire pur : soit Φ un réel, on a

$$\boxed{e^{\mathrm{j}\Phi} = \cos(\Phi) + \mathrm{j}\sin(\Phi).}$$

D'où :

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(e^{\mathrm{j}\Phi}\right) = \cos(\Phi) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(e^{\mathrm{j}\Phi}\right) = \sin\Phi.}$$

On a aussi

$$\boxed{\left|e^{\mathrm{j}\Phi}\right| = 1.}$$

• Si $\underline{z} = Xe^{\mathrm{j}\Phi}$ avec $X > 0$ réel, alors $\boxed{\left|Xe^{\mathrm{j}\Phi}\right| = X \text{ et } \arg(Xe^{\mathrm{j}\Phi}) = \Phi.}$

• On peut écrire :

$$\underline{z} = |\underline{z}|\, e^{\mathrm{j}\arg(\underline{z})}.$$

• On a : $\cos x = \dfrac{e^{\mathrm{j}x} + e^{-\mathrm{j}x}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{\mathrm{j}x} - e^{-\mathrm{j}x}}{2\mathrm{j}}$, ce qui peut être utile si l'on a oublié ses formules trigonométriques.

Exercices pour s'entraîner

Pour chacune de ces fonctions de transfert, calculer le module et l'argument. α, τ et H_0 sont des réels strictement positifs.

$$1\text{–}\ \ \underline{H} = \frac{-\alpha}{1 + \mathrm{j}\tau\omega}, \qquad 2\text{–}\ \ \underline{H} = \frac{1}{\mathrm{j}\tau\omega}, \qquad 3\text{–}\ \ \underline{H} = H_0\,\frac{\mathrm{j}\tau\omega - 1}{\mathrm{j}\tau\omega + 1}.$$

Donner la partie réelle des nombres complexes suivants. A et φ sont des réels.

$$4\text{–}\ \ \underline{z} = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi)}, \qquad 5\text{–}\ \ \underline{z} = A\,\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi)},$$

Réponses :

$$1\text{–}\ \ |\underline{H}| = \frac{|\alpha|}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}, \qquad \arg(\underline{H}) = \pi - \arctan(\tau\omega).$$

$$2\text{–}\ \ |\underline{H}| = \frac{1}{|\tau\omega|}, \qquad \arg(\underline{H}) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$3\text{–}\ \ |\underline{H}| = |H_0|, \qquad \arg(\underline{H}) = \pi - 2\arctan(\tau\omega).$$

$$4\text{–}\ \ \mathrm{Re}(\underline{z}) = A\,\cos(\omega t + \varphi),$$

$$5\text{–}\ \ \text{On écrit } \mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2},\ \text{donc } \underline{z} = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi + \pi/2)},\ \text{d'où } \mathrm{Re}(\underline{z}) = A\,\cos(\omega t + \varphi + \pi/2).$$

Fiche méthode
Mathématiques

Équations différentielles d'ordre 1 et 2

Cette fiche aborde uniquement les équations différentielles *linéaires à coefficients constants* d'ordre 1 et 2. C'est presque toujours ce type d'équations que vous rencontrerez en physique-chimie. Attention toutefois, en mathématiques vous manipulerez régulièrement des équations non linéaires (par ex. $y'^2 + y = 0$) ou à coefficients non constants (par ex. $y'(t) + t\,y(t) = 0$), et les résultats présentés ici ne s'appliquent pas.

I Cas des systèmes du 1er ordre

Équation	Solution
Équation homogène : $\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = 0}$	$\boxed{u(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$ A est une constante réelle, qui peut être obtenue avec la condition initiale $u(t=0)$.
Équation avec second membre constant : $\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = \frac{E}{\tau}}$	$\boxed{u(t) = u_H(t) + u_P(t),}$ avec : ▶ $\boxed{u_H(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$ solution de l'équation homogène, ▶ $u_P = E$ solution particulière de l'équation. Attention : la constante A se détermine avec la solution totale $u(t=0) = A + u_P(t=0)$, et certainement pas avec $u_H(t=0)$. Rq : si le second membre est sinusoïdal, du type $\alpha\cos\omega t$, alors la solution particulière est celle du régime sinusoïdal forcé (étude en complexes).

Voir ce site pour un tableau un peu plus complet, et surtout pour les liens vers des animations de systèmes vérifiant ces équations (charge et décharge de condensateur, etc.) : http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/equadiff/equadif/ordre1.html (le lien est aussi sur le site de la classe, rubrique "TP, DS, maths…").

II Cas des systèmes du 2e ordre

Remarque générale : les équations du second ordre font intervenir deux constantes d'intégration. Il faut donc deux conditions initiales pour les déterminer, en générale une sur $u(t=0)$ et une sur $u'(t=0)$.

Sur le même site que précédemment, mais pour les systèmes du 2e ordre : http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/equadiff/equadif/ordre2.html (le lien est aussi sur le site de la classe, rubrique "TP, DS, maths…").

Équation	Solution
Équation de type oscillateur harmonique (donc sans frottement), homogène : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2u=0}$	$\boxed{u(t)=A\,\cos(\omega_0 t)+B\,\sin(\omega_0 t),}$ Détermination de A et B : Supposons que l'on connaisse $u(t=0)=u_0$ et $u'(t=0)=u_1$. On a alors $u_0=u(t=0)=A$, et pour $u'(t=0)$ il faut d'abord calculer $u'(t)=-A\omega_0\,\sin(\omega_0 t)+B\omega_0\,\cos(\omega_0 t)$, puis prendre la valeur à $t=0$: $u'(t=0)=B\omega_0$. On a donc $u_1=B\omega_0$ et donc $B=u_1/\omega_0$. Rq : on peut aussi avoir la solution sous la forme $u(t)=A\,\cos(\omega_0 t+\varphi)$, avec A et φ des constantes à déterminer avec $u(t=0)$ et $u'(t=0)$.
Équation de type oscillateur harmonique (donc sans frottement), avec second membre : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2u=\alpha}$	$\boxed{u(t)=u_H(t)+u_P(t),}$ avec : ▶ $\boxed{u_H(t)=A\,\cos(\omega_0 t)+B\,\sin(\omega_0 t)}$ solution de l'équation homogène, ▶ $u_P=\alpha/\omega_0$ solution particulière de l'équation.

Équation	Solution
Équation avec frottement (terme $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$), homogène : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+2\lambda\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2u=0}$ ou $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2u=0}$	Équation caractéristique : $\boxed{r^2+\dfrac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0,}$ de discriminant $\Delta=4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2}-1\right)=4(\lambda^2-\omega_0^2)$. Solution : ▶ Si $Q<1/2$ (soit $\lambda>\omega_0$) : régime apériodique. Les racines r_1 et r_2 du polynôme sont réelles. On a $\boxed{u(t)=A\exp(r_1t)+B\exp(r_2t).}$ ▶ Si $Q=1/2$ (soit $\lambda=\omega_0$) : régime critique. $\Delta=0$ et une seule racine (double) $r_1=-\omega_0$. On a $\boxed{u(t)=(At+B)\exp(-\omega_0 t).}$ ▶ Si $Q>1/2$ (soit $\lambda<\omega_0$) : régime pseudo-périodique. Les racines r_1 et r_2 du polynôme sont complexes conjugués, $r_1=-\lambda+\mathrm{j}\Omega$ et $r_2=-\lambda-\mathrm{j}\Omega$ avec $\lambda=\dfrac{\omega_0}{2Q}$ et $\Omega=\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$. On a $\boxed{u(t)=\exp(-\lambda t)\,[A\cos(\Omega t)+B\sin(\Omega t)].}$ Rq 1 : On rappelle que $Q=\omega_0/(2\lambda)$ donne une idée du nombre d'oscillations dans le régime pseudo-périodique (donc de la durée du transitoire). Rq 2 : Pour le régime pseudo-périodique, on peut aussi écrire la solution sous la forme $u(t)=\exp(-\lambda t)\,A\cos(\omega t+\varphi)$.

Équation avec frottement et avec second membre constant : $$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+2\lambda\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2u=\alpha}$$ ou $$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2u=\alpha}$$	$\boxed{u(t)=u_H(t)+u_P(t),}$ avec : ▶ $u_H(t)$ solution de l'équation homogène (voir au dessus), ▶ $u_P=\alpha/\omega_0^2$ solution particulière de l'équation. Rq : si le second membre est sinusoïdal, du type $\alpha\cos\omega t$, alors la solution particulière est celle du régime sinusoïdal forcé (étude en complexes).

III Exercices pour s'entraîner

a. $f'(x)+af(x)=0$ avec a constant.

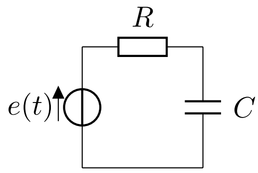
b. $\dot{u}+\dfrac{u(t)}{\tau}=0$ avec τ constant.

c. $\dot{u}+\dfrac{u(t)}{\tau}=\dfrac{E}{\tau}$ avec E et τ constants.

d. $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\alpha\,i(t)+\beta$ avec α et β constants.

e. $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}=\dfrac{T(s)}{c_p}$ avec c_p constant.

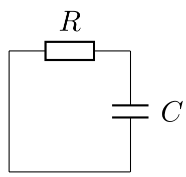
$\rightsquigarrow_1$ On considère le circuit RC série ci-contre. La source de tension délivre une tension nulle pour $t<0$ (et le condensateur est déchargé) et égale à E pour $t\geq 0$. Déterminer la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur.



$\rightsquigarrow_2$ L'équation différentielle régissant les oscillations d'une masse accrochée à un ressort est $m\ddot{x}=-kx$, $k>0$. Écrire les solutions de cette équation, sachant qu'à $t=0$ on a $x=x_0$ et une vitesse nulle.

$\rightsquigarrow_3$ On considère maintenant que la masse oscille dans un milieu où les frottements ne peuvent plus être négligés. On a donc $m\ddot{x}=-kx-f\dot{x}$ avec k, $f>0$. Donner l'expression de f à partir de laquelle il n'y aura plus du tout d'oscillations.

$\rightsquigarrow_4$ On considère le circuit RC série ci-contre. À $t=0$ le condensateur est chargé (charge q, on notera $u_0=q/C$). Déterminer la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur.



Réponses :

a. $f(x)=C\exp(-ax)$ **b.** $u(t)=C\exp(-t/\tau)$ **c.** $u(t)=C\exp(-t/\tau)+E$

d. $i(t)=C\exp(\alpha t)-\beta/\alpha$ **e.** $T(s)=C\exp(s/c_p)$

La correction des autres est sur le site de la classe, rubrique “TP, DS, maths...”.

Fiche méthode
Mathématiques

Équations différentielles directement intégrables

Dans chaque cas, donner la solution de l'équation différentielle. On ne précisera pas la valeur de la constante d'intégration (car on ne connaît pas les conditions initiales).

a. $f'(x) = a$ avec a constant.

b. $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho_0 g$ avec ρ_0 et g constants.

c. $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{P}{c}$ avec P et c constants.

d. $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \rho_0 g$ avec ρ_0 et g constants.

e. $\dot{\theta} = \omega_0$ avec ω_0 constant.

f. $\dfrac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p,pes}}}{\mathrm{d}x} = mg$, m et g constants.

g. $T''(x) = 0$.

h. $T''(x) = a$, a constant.

Réponses :
On note C la constante d'intégration.

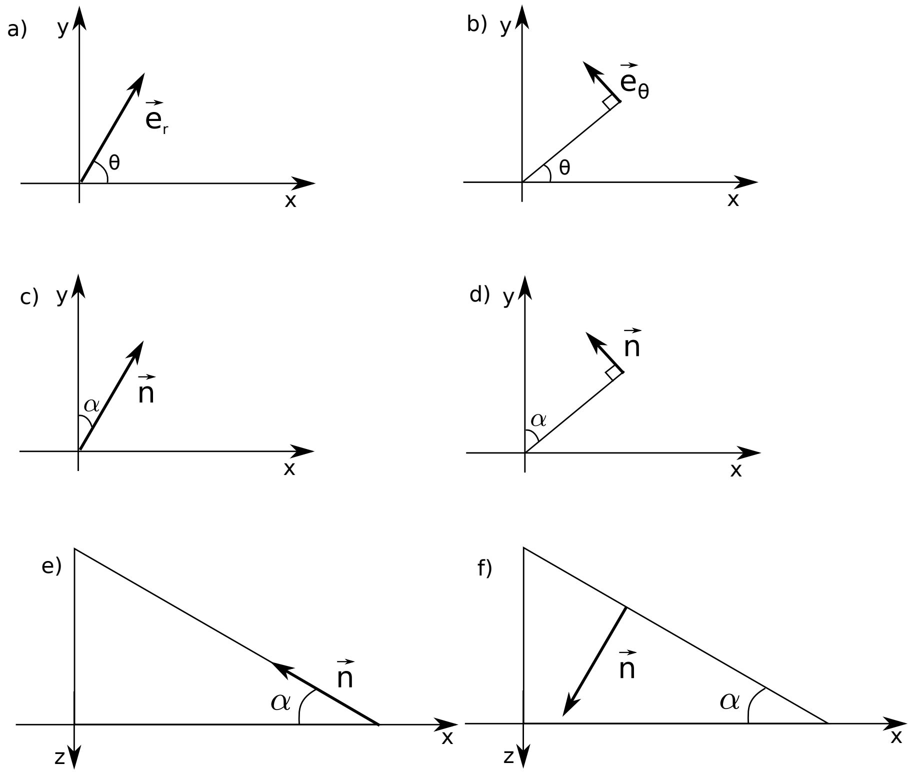
a. $f(x) = ax + C$ **b.** $p(z) = -\rho_0 gz + C$ **c.** $T(t) = -\dfrac{P}{c}\,t + C$ **d.** $p(z) = \rho_0 gz + C$

f. $E_{\mathrm{p,pes}} = mgx + C$ **e.** $\theta(t) = \omega_0 t + C$

g. $T'(x) = A$ puis $T(x) = Ax + B$ **h.** $T'(x) = ax + A$ puis $T(x) = \dfrac{ax^2}{2} + Ax + B$
(pour g et h : A et B constantes d'intégration)

Écrire un vecteur dans une autre base

Dans chacun des cas suivants, exprimer le vecteur $\vec{n}$, $\vec{e}_\theta$, ou $\vec{e}_r$, en fonction des vecteurs de la base cartésienne $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et/ou $\vec{e}_z$.



Réponses :

a − $\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y$

b − $\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y$

c − $\vec{n} = \sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_y$

d − $\vec{n} = -\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y$

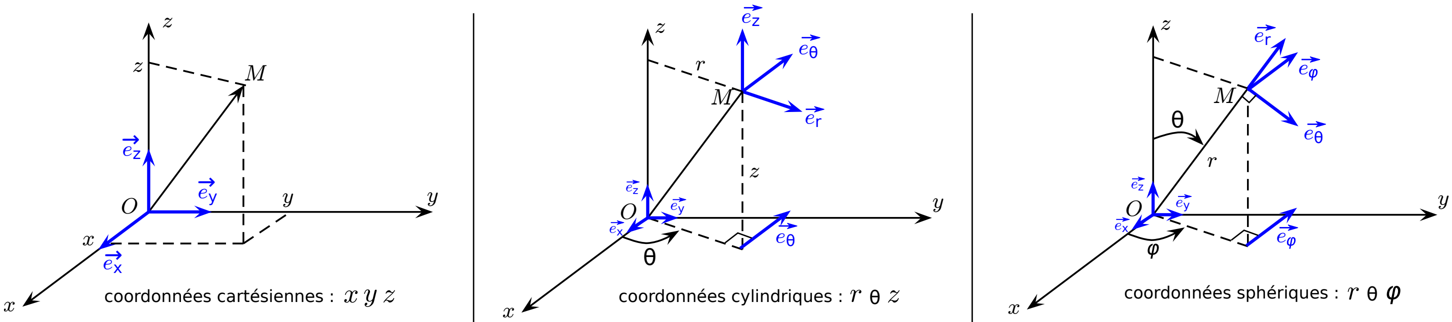
e − $\vec{n} = -\cos\alpha\,\vec{e}_x - \sin\alpha\,\vec{e}_z$

f − $\vec{n} = -\sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_z$

Fiche méthode
Mathématiques

Systèmes de coordonnées

Définitions



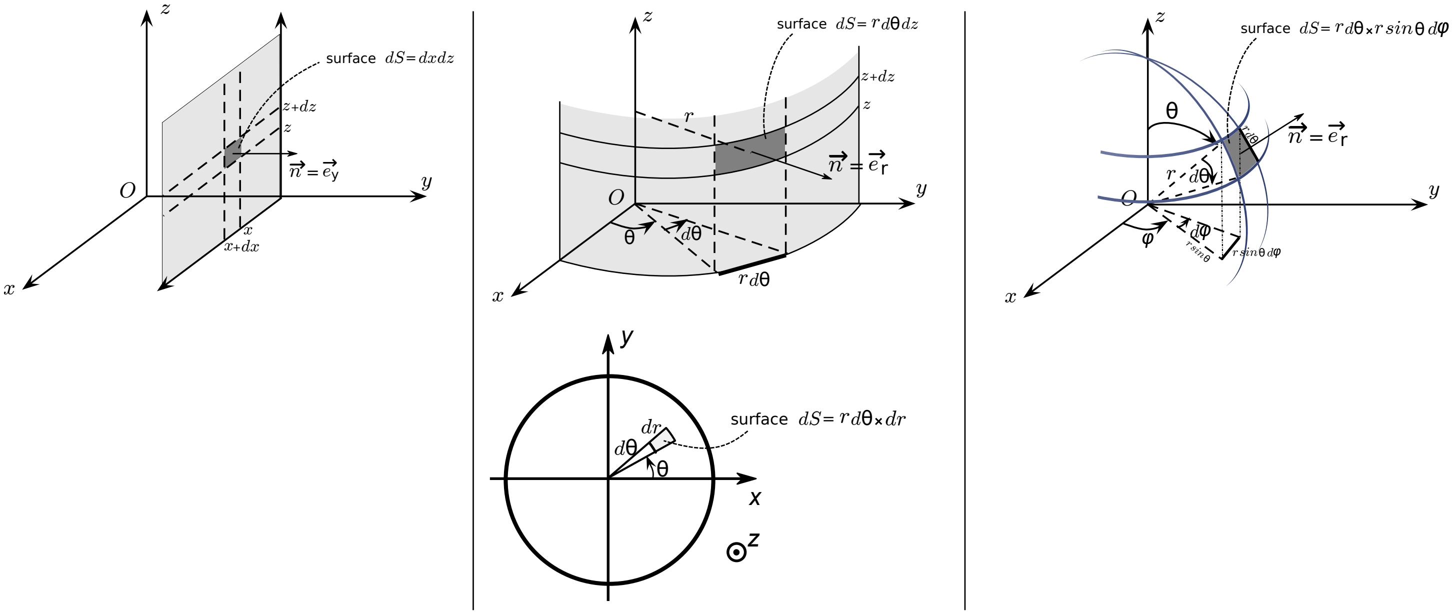
$x, y, z \in]-\infty, +\infty[$

$r \in [0, +\infty[$
$\theta \in [0, 2\pi]$
$z \in]-\infty, +\infty[$

$r \in [0, +\infty[$
$\theta \in [0, \pi]$
$\varphi \in [0, 2\pi]$

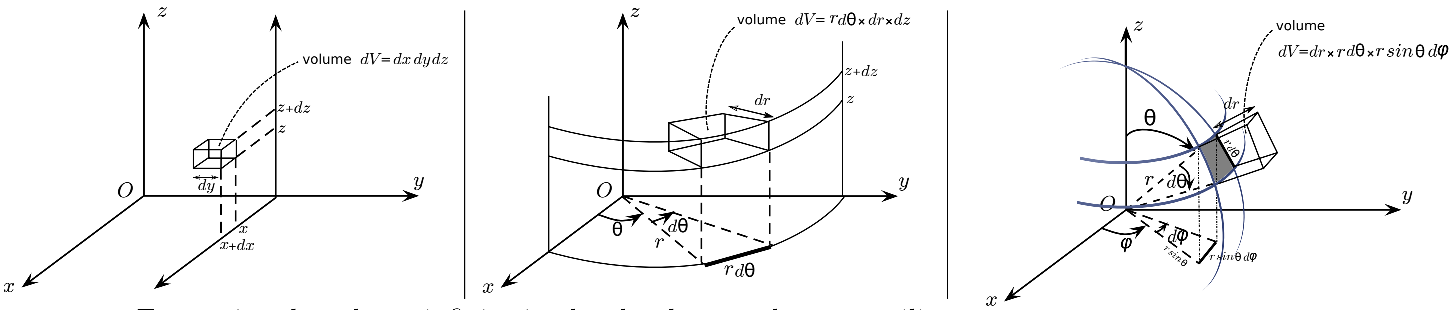
Remarque : Les coordonnées polaires correspondent aux coordonnées cylindriques, mais dans un plan seulement (coordonnées r et θ, pas de z). C'est un système à deux dimensions.

Surfaces infinitésimales



Remarque : C'est bien, à chaque fois, homogène à une surface.

Volume infinitésimal



Expression du volume infinitésimal, selon les coordonnées utilisées :
• Cartésiennes* : $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ • Cylindriques : $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ • Sphériques : $\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$

Remarque : C'est bien, à chaque fois, homogène à un volume.

La même chose avec possibilité de faire bouger la figure, et d'afficher l'élément de surface et de volume : http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/index.php.