Correction – DM 18 – Supraconducteurs dans un champ magnétique

1 - a - Loi d'Ohm locale : $\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}.}$

b - Puissance volumique transmise par les champs vers les charges : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}\tau} = \vec{j}\cdot\vec{E} = \sigma\|\vec{E}\|^2.}$ Ceci est non nul, que l'on soit en régime stationnaire ou non.
Dans le cas d'un conducteur ohmique les porteurs de charges dissipent ensuite cette puissance via des collisions avec le réseau cristallin, ce qui se traduit par une production d'énergie thermique : ce sont des pertes par effet Joule.

2 - En régime stationnaire on a $\dfrac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \vec{0}$, la première équation de London devient donc $\boxed{\vec{E} = \vec{0}}$: le champ électrique est nul dans le supraconducteur.
La seconde équation est inchangée.
La puissance volumique transmise est donc $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}\tau} = \vec{j}\cdot\vec{E} = 0.}$

3 - a - On part de la seconde équation de London, dans laquelle on exprime $\vec{j}$ à l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère. Cette dernière s'écrit, en régime stationnaire : $\vec{j} = \dfrac{1}{\mu_0}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}$, donc on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\right) &= -\frac{ne^2}{m}\,\vec{B}\\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) &= -\frac{\mu_0 ne^2}{m}\,\vec{B}\\
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{B}) - \Delta\vec{B} &= -\frac{\mu_0 ne^2}{m}\,\vec{B}\\
-\Delta\vec{B} &= -\frac{\mu_0 ne^2}{m}\,\vec{B} \quad \text{car } \mathrm{div}\,\vec{B} = 0\\
\Delta\vec{B} - \frac{\mu_0 ne^2}{m}\,\vec{B} &= 0.
\end{aligned}$$

Comme $\vec{B} = B_z(x)\vec{e}_z$, on a $\Delta\vec{B} = \Delta B_z(x)\,\vec{e}_z = \dfrac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\vec{e}_z = B_z''(x)\vec{e}_z$. On arrive donc bien à :

$$\boxed{B_z''(x) - \frac{B_z(x)}{l^2} = 0 \qquad \text{avec} \qquad l = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 ne^2}} = 17\,\mathrm{nm}.}$$

b - La solution générale de l'équation précédente est $\boxed{B_z(x) = \alpha \mathrm{e}^{-x/l} + \beta \mathrm{e}^{+x/l}.}$
Le supraconducteur est infini dans la direction $\vec{e}_x$. Pour que $B_z(x)$ reste borné lorsque $x \to +\infty$, il faut donc que $\beta = 0$.
Pour déterminer α on utilise la continuité en $x = 0$: $B_0 = B_z(0) = \alpha$.
On a donc $\boxed{B_z(x) = B_0 \mathrm{e}^{-x/l}.}$
Ainsi on a montré qu'au bout de quelques l (soit une centaine de nanomètres), le champ magnétique dans le supraconducteur est quasi nul.

4 - a - On applique le principe fondamental de la dynamique à un électron, qui n'est soumis qu'à la force $q\vec{E}$ avec $q = -e$ sa charge. On a donc bien $\boxed{m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{E}.}$

b - On a la relation $\vec{j} = -en\vec{v}$, donc en utilisant l'équation $m\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e\vec{E}$ on obtient : $\boxed{\dfrac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \dfrac{ne^2}{m}\vec{E},}$ ce qui est bien l'équation 1 de London.

c - On prend pour cela le rotationnel de la première équation et on utilise $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.
On a donc $\dfrac{\partial \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{j}}{\partial t} = \dfrac{ne^2}{m}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{ne^2}{m}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, ce qui donne bien $\boxed{\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{j} + \dfrac{ne^2}{m}\vec{B}\right) = \vec{0}.}$