Partie V : électromagnétisme
Chapitre 3

Formulation de l'électromagnétisme : équations de Maxwell

I Lois locales et lois intégrales

formulation locale
En un point M
Exemples :
2 - Divergence $\mathrm{div}\,\vec{A}$
3 - Rotationnel $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$

formulation intégrale
Implique des intégrales
- Flux surface fermée $\oiint \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$
- Circulation contour fermé $\oint \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

4- Équation locale de conservation de la charge à 1D ou 3D

II Équations de Maxwell

1 Les 4 équations locales
et sous forme intégrale

$\frac{\partial}{\partial t} = 0$

En régime stationnaire
2- on retrouve l'électrostatique et la magnétostatique
3 - équation de Poisson et de Laplace pour le potentiel V

(à colorier avec une couleur par partie lors de la relecture du cours, si besoin voir la version couleur sur Internet)

Plan du cours

Ce qu'il faut connaître

——— (cours : I)

▶1 Comment interpréter l'opérateur divergence ? ($\mathrm{d}\tau \times \mathrm{div}\,\vec{A}$ donne le flux de $\vec{A}$ sortant d'un petit volume $\mathrm{d}\tau$ autour du point considéré.)

Savoir reconnaître des situations simples où $\mathrm{div}\,\vec{A} > 0$ ou < 0.

▶2 Comment interpréter l'opérateur rotationnel ? (il est lié à la circulation du champ $\vec{A}$ sur un contour entourant le point considéré)

▶3 Quelles sont les expressions des opérateurs divergence et rotationnel en coordonnées cartésiennes ? (éventuellement en s'aider du vecteur $\vec{\nabla}$).

▶4 Quelle est **l'équation de conservation de la charge ?**

▶5 Connaître la relation $\mu_0\epsilon_0 c^2 = 1$

——— (cours : II)

▶6 Donner **les équations de Maxwell** sous forme locale.

▶7 Quelle est la formulation intégrale des équations de Maxwell ?

▶8 Comment s'écrivent les équations de Poisson et de Laplace pour le potentiel V dans le cas stationnaire ? Sous quelles hypothèses sont-elles valides ?

▶9 Pour l'équation de Laplace, savoir que la solution est unique dans un domaine de l'espace $\mathcal{D}$ si l'on fixe la valeur du potentiel V sur le bord du domaine.

Ce qu'il faut savoir faire

——————— (cours : I)

▶10 Passer de la forme locale à la forme intégrale du théorème de Gauss (cf I.2.b) ou d'Ampère (cf I.3.c). On fournit pour cela les théorèmes de Stokes ou d'Ostrogradski.

▶11 Établir l'équation de conservation de la charge à 1D en effectuant un bilan de charge sur une tranche (voir cours).

——————— (cours : II)

▶12 Interpréter les équations de Maxwell écrites sous forme intégrale : l'une indique que $\vec{B}$ est à flux conservatif, une autre est le théorème de Gauss, une autre redonne la loi de Faraday de l'induction (savoir le montrer, cf I.3.d), et la dernière est le théorème d'Ampère auquel s'ajoute un terme en régime non stationnaire.

▶13 À partir des équations de Maxwell, démontrer les équations suivies par les champs en électrostatique et magnétostatique.

▶14 Démontrer l'équation de Poisson pour le potentiel V.

Documents

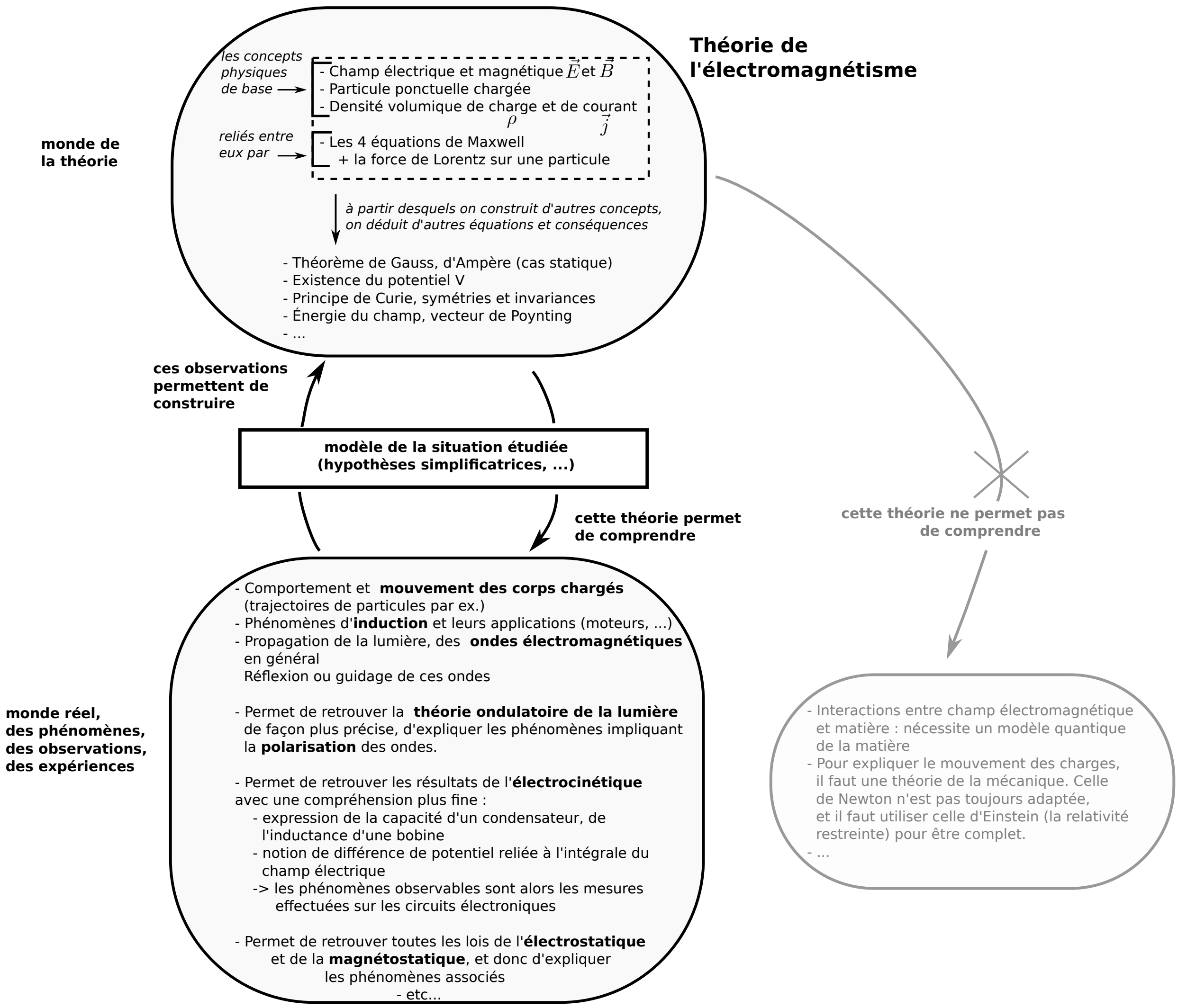
Constantes physiques intervenant dans la théorie de l'électromagnétisme :

- Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
- Permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$ (aussi appelée permittivité diélectrique du vide).
- Perméabilité du vide : $\mu_0 = 12.57 \times 10^{-7}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}}$ (aussi appelée perméabilité magnétique du vide).
- Charge élémentaire : $e = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ (la charge d'un proton est $+e$, celle d'un électron $-e$).

On a la relation $\boxed{\mu_0 \epsilon_0 \, c^2 = 1}$.

Remarque : Dans le système international d'unités, la vitesse de la lumière est fixée par définition à $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$. μ_0 est fixé par définition à $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$. ϵ_0 est alors fixé par la relation $\epsilon_0 = 1/(\mu_0\, c^2)$.

Point de vue sur la théorie de l'électromagnétisme



Bilan des lois à connaître

Équations de Maxwell :

Équations de Maxwell	**Forme intégrale**	**Cas stationnaire** on retrouve...
Équation de Maxwell-Gauss : $\mathrm{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$	$\displaystyle\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint_{\mathcal{V}} \rho\,\mathrm{d}\tau$ ($\rightarrow$ théorème de Gauss)	même chose
Équation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\mathcal{S}} \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ ($\rightarrow$ loi de Faraday $e_{\text{induit}} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$)	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ et donc existence du potentiel V tel que $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$
Équation de Maxwell-Thomson (ou flux) : $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$	$\displaystyle\oiint_{\mathcal{S}} \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = 0$ ($\rightarrow$ $\vec{B}$ à flux conservatif)	même chose
Équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \epsilon_0\mu_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint_{\mathcal{S}} \left(\mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ ($\rightarrow$ théorème d'Ampère si $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$)	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ et donc le théorème d'Ampère

Autres équations, déduites des équations de Maxwell :

Équation de conservation de la charge 1D	$\vec{j} = j_x(x,t)\vec{e}_x$, et $\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial t}\right)_x + \left(\dfrac{\partial j_x}{\partial x}\right)_t = 0$
Équation de conservation de la charge 3D	$\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{x,y,z} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$
Équation de Poisson pour le potentiel valide si : régime stationnaire	$\Delta V + \dfrac{\rho}{\epsilon_0} = 0$
Équation de Laplace pour le potentiel valide si : régime stationnaire et $\rho = 0$	$\Delta V = 0$