Partie V : électromagnétisme
Chapitre 3

TD – Formulation de l'électromagnétisme : équations de Maxwell

Remarque : exercice avec $\star$: exercice particulièrement important, à maîtriser en priorité (de même que les exemples de questions de cours des "ce qu'il faut savoir faire") | [$\bullet \circ \circ$] : difficulté des exercices

I Vrai-faux / questions courtes $\star$ | [$\bullet \circ \circ$]

1 - Boule chargée et divergence :

a - On considère une boule chargée uniformément (densité de charges ρ). Tracer les lignes de champ électrique qui partent de cette boule, dans le cas où $\rho > 0$, puis dans le cas où $\rho < 0$.

b - Le sens des lignes de champ est-il compatible avec l'équation de Maxwell-Gauss ?

2 - Dans cette question $\vec{A}$ est un champ vectoriel, qui peut être par exemple le champ électrique ou le champ magnétique, ou autre chose.

a - (V/F) Si $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ dans une zone de l'espace, alors $\vec{A} = \vec{0}$ dans cette zone. Si faux, donner une situation physique qui fournit un contre-exemple dans le cas du champ électrique puis dans le cas du champ magnétique.

b - (V/F) Si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A} = \vec{0}$ dans une zone de l'espace, alors $\vec{A} = \vec{0}$ dans cette zone. Si faux, donner une situation physique qui fournit un contre-exemple dans le cas du champ électrique puis dans le cas du champ magnétique.

II Calcul de ρ connaissant $\vec{E}$ $\star$ | [$\bullet \circ \circ$]

1 - On considère le champ électrique donné par $\vec{E} = E_0 \dfrac{x}{a}\, \vec{e}_x$ pour $-a \leq x \leq a$, $\vec{E} = E_0\, \vec{e}_x$ pour $x > a$, $\vec{E} = -E_0\, \vec{e}_x$ pour $x < -a$.

Déterminer la densité volumique de charge ρ à l'origine de ce champ électrique.

III Existence du potentiel électrostatique [$\bullet \bullet \circ$]

1 - En utilisant l'expression des opérateurs en coordonnées cartésiennes, montrer que l'on a pour tout champ scalaire f, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\right) = \vec{0}$. Le montrer d'abord pour la composante x, puis y, puis z. On rappelle également que le théorème de Schwarz indique que l'on peut échanger l'ordre des dérivées partielles, par exemple $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$.

2 - En régime variable en présence d'un champ magnétique, peut-on avoir $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$?

IV Conservation de la charge déduite des équations de Maxwell [● ○ ○]

1 - Rappeler l'équation locale de conservation de la charge.

2 - En utilisant uniquement les équations de Maxwell, démontrer cette équation.

On rappelle que :

- On peut permuter la dérivée partielle par rapport au temps et les opérateurs divergence, rotationnel, gradient ou Laplacien.
- On a $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = 0$ pour n'importe quel champ vectoriel $\vec{A}$.
- On a $\epsilon_0\mu_0 c^2 = 1$.
- L'équation de conservation de la charge est une relation entre $\vec{j}$ et ρ, il faut donc utiliser les équations de Maxwell qui font apparaître ces grandeurs...

V Équation de Poisson ★ | [● ○ ○]

On se place dans une situation en régime stationnaire. On considère le potentiel suivant : $V(x,y,z) = \dfrac{V_0}{a^2}\left(x^2+y^2-2z^2\right)$, avec V_0 un potentiel de référence positif, et a une constante positive.

1 - Quelle est l'unité de a ?

2 - Montrer que dans la zone de l'espace considérée, la densité de charges est nulle.

3 - On place une particule de charge positive en O. On s'intéresse à la force qu'elle subit et à la stabilité de cette position.

a - Tracer la variation de V en fonction de x sur l'axe Ox, puis sur l'axe Oy et sur l'axe Oz.

b - Donner l'expression du champ électrique en O.

c - La particule placée en O est-elle dans une position d'équilibre stable ?

VI Équation de Laplace, cage de Faraday [● ○ ○]

On considère une surface conductrice (métallique par exemple) entourant complètement un volume τ. On suppose ce conducteur parfait, si bien que le potentiel V prend la même valeur V_0 sur toute la surface.

1 - La situation est statique, il n'y a pas de charges dans le volume. Quelle équation utiliser dans le volume ?

En proposer une solution simple, compatible avec les conditions aux limites.

2 - Cette solution dépend-elle de la valeur et de la distribution du champ électrique en dehors du volume ?

3 - Extrait de la page Wikipédia sur la cage de Faraday : “Le boîtier métallique des ordinateurs constitue également une cage de Faraday. Si ce boîtier est non métallique (plastique), il est, pour répondre aux normes de radio-compatibilité, doublé aux endroits stratégiques, d'une fine feuille métallique reliée à la masse électrique de la machine. [...] En général, beaucoup d'appareils électroménagers sont équipés de blindage internes formant des cages de Faraday au moins pour les parties sensibles.”

Expliquer pourquoi.

Enfants dans une cage de Faraday
(Palais de la Découverte, Paris)