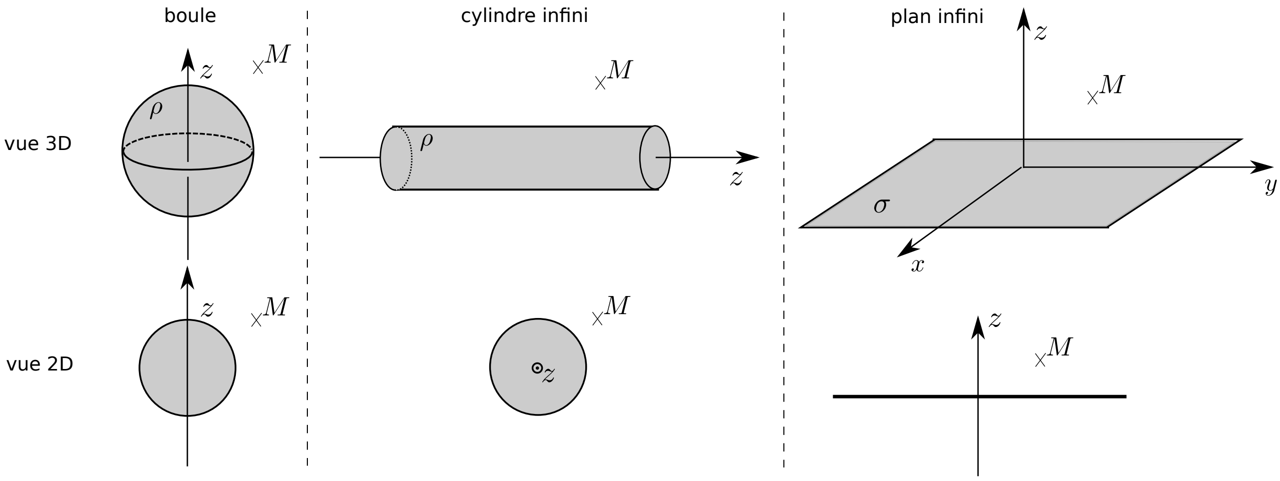
TD – Électrostatique : théorème de Gauss

Remarque : exercice avec $\star$: exercice particulièrement important, à maîtriser en priorité (de même que les exemples de questions de cours des “ce qu'il faut savoir faire”) | [● ○ ○] : difficulté des exercices

I Vrai-faux / questions courtes $\star$ | [● ○ ○]

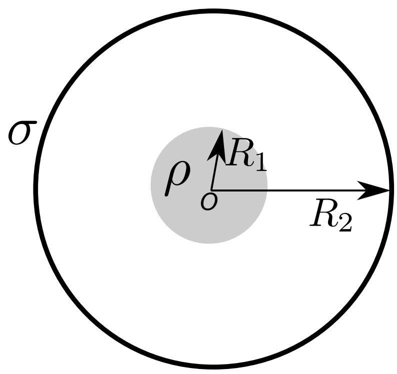
1 - (V/F) Si le flux de $\vec{E}$ à travers une surface S fermée donnée est nul (donc si $\oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = 0$), alors dans cette surface $\vec{E} = \vec{0}$?

2 - Situations classiques d'application du théorème de Gauss : dans chacun des trois cas, étudier les symétries pour donner la direction du vecteur $\vec{E}$ au point M et le tracer, étudier les invariances pour donner les variables dont dépendent les coordonnées de $\vec{E}$, tracer une surface de Gauss adéquate passant par M.



II Charge intérieure, théorème de Gauss $\star$ | [● ● ○]

On considère la situation ci-contre. ρ est une densité volumique de charges, et σ une densité surfacique de charges.
Il s'agit d'une vue en coupe d'un objet à symétrie sphérique (coupe passant par le centre O des sphères).



1 - a - Donner l'expression de la charge intérieure $Q_{\text{int}}(r)$ pour une sphère de centre O et de rayon r, en fonction de r.

b - Donner l'expression du champ $\vec{E}$ en fonction de r.

2 - Reprendre les questions précédentes en considérant cette fois qu'il s'agit d'une vue en coupe d'un objet à symétrie cylindrique (coupe selon l'axe du cylindre).

III Condensateur [● ○ ○]

On modélise un condensateur par deux armatures cylindriques de surfaces S identiques, séparées par du vide d'une distance e. On impose une différence de potentiel U entre les deux.

1 - On néglige tout effet de bord. Qu'est-ce que cela signifie ? En déduire la direction et la dépendance du champ $\vec{E}$.

2 - Définir la capacité du condensateur. Démontrer que $C = \epsilon_0 S/d$. On utilisera le fait que le champ créé par un plan infini (xOy) de charge surfacique σ est $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z$ pour $z > 0$, et l'opposé pour $z < 0$.

3 - Application numérique pour $S = 1\,\text{cm}^2$ et $e = 1\,\text{mm}$.

4 - Que peut-on faire pour augmenter la capacité ? Avec quelle limite ? Comment dépasser cette limite ?

IV Champ créé par une boule chargée non uniformément [• • ○]

On considère une boule de rayon R, chargée suivant la distribution de charges $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$ si $r \leq R$, et $\rho(r) = 0$ si $r > R$.

1 – Déterminer l'expression de la charge totale Q_{tot} portée par cette boule.

2 – Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}$ en dehors de la boule. On détaillera toutes les étapes.

3 – Déterminer ensuite l'expression du champ électrique en un point quelconque à l'intérieur de la boule.

4 – En déduire l'expression du potentiel électrostatique.

5 – Tracer $\|\vec{E}\|$ et V en fonction de r.

6 – Vérifier que dans la boule, l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ est bien satisfaite. On prendra les formules nécessaires dans le formulaire.

On donne, en coordonnées sphériques et dans le cas d'une fonction f qui ne dépend que de r : $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \dfrac{\text{d}f}{\text{d}r}\vec{e}_r$.

V Champ de gravité d'un astre [• ○ ○]

1 - Rappeler les analogies formelles que l'on peut faire entre électrostatique et gravitation (équivalent du champ $\vec{E}$, du terme $1/(4\pi\epsilon_0)$, de la charge q).

Donner le théorème de Gauss "version gravitation".

2 - On considère une planète de rayon R. On suppose la distribution de masse uniforme. Déterminer le champ de gravité en tout point de l'espace (dans et hors de la planète). Le représenter sur un graphique.

VI Champ dans une cavité [• • ○]

On considère une boule uniformément chargée (densité de charge ρ), de centre O. Dans cette boule il y a présence d'une cavité sphérique vide, de centre O' différent de O.

1 - Donner l'expression du champ $\vec{E}$ dans la cavité vide. Que remarque-t-on de particulier ?

(Indice : il faut utiliser le théorème de superposition.)

On utilisera le fait que pour une boule uniformément chargée seule (densité volumique de charge ρ), le champ électrique est donné dans la boule par l'expression $\vec{E} = \dfrac{\rho r}{3\epsilon_0}\vec{e}_r$.