Partie V : électromagnétisme
Chapitre 1.1

Électrostatique : champ $\vec{E}$ et potentiel V

Plan schématique du cours

I Liens entre charges électriques et champ électrique

Charges — **Champ $\vec{E}$**

- ponctuelle q ⟶ $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0\, r^2}\,\vec{e}_r$ ⟶
- ρ, σ, λ ⟶ $\vec{E} = \iiint_V \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon_0\, r^2}\,\vec{e}_r$ ⟶

  $\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}V$, $\mathrm{d}q = \sigma\,\mathrm{d}S$, $\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}l$

Symétries, invariances ⟶ conséquences ⟶
- Direction de $\vec{E}$
- Variables dont $\vec{E}$ dépend

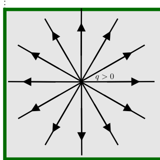
II Potentiel électrostatique V

charge ponctuelle q ⟶ $V = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0\, r}$ ⟶ $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$

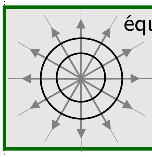
$\int_A^B \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = -(V_B - V_A)$

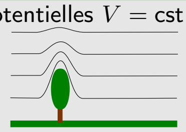
III Lignes de champ, tubes de champ, surfaces équipotentielles

lignes de champ $\vec{E}$



équipotentielles $V = $ cst





IV Énergie potentielle électrostatique

$\vec{F}$ dérive du potentiel $E_p = qV$
$E_c + qV = $ cst ⟵ Force $\vec{F} = q\vec{E}$ ⟵ Champ $\vec{E}$

Plan du cours

I - Liens entre charges électriques et champ électrique

1 - Charge ponctuelle et champ créé

2 - Distribution continue de charges et champ créé

3 - Symétries et invariances de la distribution de charges et conséquences pour $\vec{E}$

II - Le potentiel électrostatique V

1 - Circulation de $\vec{E}$ et potentiel V

2 - Potentiel électrostatique pour une charge ponctuelle

III - Lignes de champ, tubes de champ, surfaces équipotentielles

1 - Définitions

2 - Liens entre lignes de champ et surfaces équipotentielles

IV - Énergie potentielle électrostatique

Ce qu'il faut connaître

(cours : I)

►1 Quand peut-on dire qu'un champ électrique est électrostatique ?

Quelle est l'unité du champ E ?

Donner l'ordre de grandeur de E pour un exemple au choix.

▶$_2$ Quelle est l'expression de la loi de Coulomb ?

▶$_3$ Que dit le principe de superposition ?

▶$_4$ Donner l'expression de la charge totale Q_{tot} résultant d'une distribution de charges volumique, surfacique ou linéique, à l'aide d'intégrales.

▶$_5$ Donner l'expression du champ $\vec{E}$ créé par une distribution de charges volumique, surfacique ou linéique, à l'aide d'intégrales.

▶$_6$ Symétries : Quelle est la définition d'un **plan de symétrie** d'une distribution de charges ? Quelles sont les conséquences sur la direction du champ $\vec{E}$?

Même question pour un **plan d'antisymétrie** d'une distribution de charges.

▶$_7$ Invariances : Que dire de la dépendance des composantes du champ $\vec{E}$ lorsque la distribution de charges est invariante par translation selon z ? Par rotation autour d'angle θ autour d'un axe ? etc.

——— (cours : II)

▶$_8$ Quelle est la définition de la circulation du champ $\vec{E}$ le long d'un chemin $\mathcal{C}$?

▶$_9$ Connaître la relation $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ pour le champ électrostatique.

▶$_{10}$ Connaître la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$.

▶$_{11}$ Connaître la relation $\int_A^B \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{d}l} = -\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}\,V \cdot \overrightarrow{\text{d}l} = -(V_B - V_A)$.

Connaître les conséquences :

- la circulation de $\vec{E}$ entre deux points fixes ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement du potentiel V en ces points ;
- la circulation de $\vec{E}$ sur un chemin fermé est nulle.

▶$_{12}$ Quelle est l'expression en coordonnées cartésiennes de l'opérateur gradient ?

▶$_{13}$ Quelle est l'expression du potentiel $V(r)$ créé par une charge ponctuelle ?

——— (cours : III)

▶$_{14}$ Définir une ligne de champ. Allure et sens pour une charge ponctuelle > 0 ou < 0 ?

▶$_{15}$ Définir une surface équipotentielle.

▶$_{16}$ Connaître les propriétés liant lignes de champ et surfaces équipotentielles : elles sont orthogonales, V décroît le long d'une ligne de champ, et $\vec{E}$ est plus intense là où les équipotentielles se resserrent.

——— (cours : IV)

▶$_{17}$ Quelle est l'expression de l'énergie potentielle électrostatique d'une charge placée dans un champ extérieur $\vec{E}$?

Ce qu'il faut savoir faire

Remarque : La liste ci-dessous comporte les savoir faire généraux, ainsi que des exemples concrets de questions qui peuvent être posées. Ces exemples ne sont pas exhaustifs : d'autres questions peuvent aussi être abordées.

——— (cours : I)

▶$_{18}$ Utiliser les points ▶$_4$, ▶$_6$, ▶$_7$ ci-dessus dans des exercices.

- TD II et III.
- On considère un plan infini uniformément chargé. Symétries ? Invariances ? en déduire la dépendance spatiale de $\vec{E}$ et sa direction.

– On considère une sphère de rayon R uniformément chargée en surface (densité de charge surfacique σ), quelle est la charge totale portée ? Même question si uniformément chargée en volume (densité de charge volumique ρ) [1].

——— (cours : II)

►19 Retrouver l'expression du potentiel V créé par une charge ponctuelle.

– On considère une charge ponctuelle q placée en O. On donne $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques pour un champ V ne dépendant que de r. Démontrer l'expression du potentiel V créé par cette charge. (partir pour cela de l'expression, connue, de $\vec{E}$)

►20 Étant donné l'expression du potentiel électrostatique V, calculer l'expression du champ $\vec{E}$. (Si coordonnées sphériques ou cylindriques : l'expression de l'opérateur gradient est fournie.)

– On donne $V = V_0 z/L$ (coordonnées cartésiennes), calculer $\vec{E}$.

►21 Calculer une différence de potentiel par circulation du champ électrostatique (le champ $\vec{E}$ étant donné).

– On considère le champ $\vec{E}(x, y, z) = E_0\vec{e}_z$ ($E_0 = \mathrm{cst}$). Donner l'expression de la différence de potentiel entre les points $A(0, 0, 0)$ et $B(d, 0, h)$. [2]

——— (cours : III)

►22 Étant donnée une distribution de charges, tracer l'allure des lignes de champ électrostatique. Respecter en particulier les conséquences des symétries et invariances de la distribution.

►23 Étant donnée une carte des lignes de champ électrostatique, tracer l'allure des surfaces équipotentielles (et vice-versa).

Savoir repérer les zones de champ forts à partir des équipotentielles.

– Pour ce point et le précédent : TD III (q.3), et exemples sur la fiche de début de chapitre.

——— (cours : IV)

►24 Démontrer l'expression de l'énergie potentielle électrostatique d'une charge placée dans un champ $\vec{E}_{\mathrm{ext}}$ (cours).

►25 L'utiliser lorsque c'est pertinent.

– TD V

Documents associés au cours

Constantes physiques intervenant dans la théorie de l'électrostatique :

- Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 2.99\,792\,458 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ (par définition du mètre).
- Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$ (aussi appelée permittivité diélectrique du vide).
- Charge élémentaire : $e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ (par définition du coulomb). La charge d'un proton est $+e$, celle d'un électron $-e$.

Autres constantes physiques utiles :

- Masse d'un électron : $m_{\mathrm{e}} = 9.109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ (on retiendra $10^{-30}\,\mathrm{kg}$), d'un proton : $m_{\mathrm{p}} = 1.673 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$.
- Constante universelle de gravitation : $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$.

1. $Q_{\mathrm{tot}} = 4\pi R^2\,\sigma$ et $Q_{\mathrm{tot}} = (4/3)\pi R^3\,\rho$.
2. $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_A^B E_0\vec{e}_z \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$. Or $(\vec{e}_z \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}) = \mathrm{d}z$. Donc $V_A - V_B = \int_A^B E_0\mathrm{d}z = E_0(z_B - z_A) = E_0 h$, soit encore $V_B - V_A = -E_0 h$.

Introduction à la partie sur l'électromagnétisme

a/ Les entités de bases : Charges et champs

Exemples de charges électriques : Les électrons dans un atome, le noyau atomique, les électrons de conduction dans un métal, des ions en solution ou dans un gaz.

- La présence de charges, immobiles ou en mouvement (on parle alors de courants), est à l'origine d'un champ électromagnétique $\vec{E}(M,t)$, $\vec{B}(M,t)$.
- En retour, ce champ électromagnétique agit sur les charges via la force de Lorentz $\vec{F} = q_{\text{charge}}(\vec{E} + \vec{v}_{\text{charge}} \wedge \vec{B})$, où les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont pris à l'endroit où se situe la charge.

b/ Force entre deux charges

- La force qui s'exerce entre deux charges est transmise par l'intermédiaire des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.
- Il n'y a donc pas d'action instantanée : si on bouge une charge, le champ électromagnétique est modifié de proche en proche jusqu'à l'autre charge (vitesse c dans le vide). C'est similaire à la propagation de vagues à la surface d'un lac.

c/ Unités

- $\|\vec{E}\|$: V/m (volts par mètres)
- $\|\vec{B}\|$: T (tesla)
- q : C (coulomb)
- I : A = C/s (ampère)

d/ Deux domaines d'étude restreints :

- **L'électrostatique :** étude des situations avec uniquement un champ électrique $\vec{E}$ stationnaire (pas de dépendance en t, pas de champ magnétique).

  Ceci implique une distribution de charges fixes dans le référentiel d'étude.

  C'est l'objet des chapitres 1.1 et 1.2.

  Dans ce cas là, le champ électrique $\vec{E}$ est appelé **champ électrostatique**.

- **La magnétostatique :** étude des situations avec uniquement un champ magnétique $\vec{B}$ stationnaire (pas de dépendance en t, pas de champ électrique).

  Ceci implique une distribution de courants dont l'intensité ne varie pas dans le temps et portés par des fils fixes dans le référentiel d'étude.

  C'est l'objet du chapitre 2.

On étudiera la situation générale (champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à la fois, dépendants du temps) dans le chapitre 3, en exposant la théorie de l'électromagnétisme. Le postulat de départ sera alors les équations de Maxwell. Les situations électrostatique et magnétostatique seront alors vues comme des cas particuliers de cette situation générale.

I Liens entre charges électriques et champ électrique

I.1 Charges ponctuelles et champ créé

⋆ Forces entre deux charges électriques

On considère deux charges électriques q_1 et q_2, supposées ponctuelles et immobiles.

La loi de Coulomb donne l'expression de la force exercée par la charge 2 sur la charge 1 :

$\boxed{\vec{F}_{2\to1} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\, d^2}\,\vec{u}_{2\to1}.}$ + schéma

espace 1

Remarques :

▷ ε_0 est la permittivité diélectrique du vide. Voir page 3.

▷ On a donc $\vec{F}_{2\to1} = -\vec{F}_{1\to2}$.

▷ Si q_1 et q_2 sont de même signe, alors :

espace 2

Si q_1 et q_2 sont de signe opposé, alors :

espace 3

Remarque historique :
Cette loi pour la force entre deux charges a été mise en évidence à l'aide d'expériences par Coulomb vers 1785. Il a utilisé une balance de torsion afin de mesurer la force entre deux boules chargées en fonction de la distance entre leurs centres.

⋆ Champ électrique

On peut écrire $\vec{F}_{2\to1} = q_1 \times \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\, d^2}\,\vec{u}_{2\to1}$, et on pose que le terme $\dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\, d^2}\,\vec{u}_{2\to1}$ est le champ électrique créé par la charge 2 à l'emplacement de la charge 1.

On a alors $\vec{F}_{2\to1} = q_1 \times \vec{E}_{\text{créé par}\, q_2}(M_1)$.
La force entre les charges n'est pas instantanée, elle est transmise par l'intermédiaire du champ électrique.

Généralisation : Soit une charge ponctuelle q immobile.
Le champ électrique créé par cette charge en un point M a pour expression :
$\boxed{\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\,\vec{u}_r.}$ + schéma

Et s'il y a présence d'une charge q' au point M, alors cette charge q' subit une force :

$\vec{F}_{\to q'} = q' \times \vec{E}(M)$

espace 4

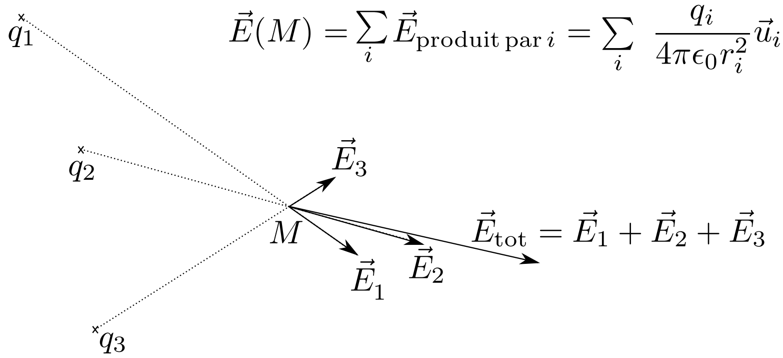
Les charges étant immobiles, on parle de **champ électrostatique** pour désigner ce champ électrique $\vec{E}$ (statique car pas de dépendance en t).

⋆ Cas d'un ensemble de charges ponctuelles, principe de superposition

Principe de superposition : le champ électrostatique créé par un ensemble de charges est égal à la somme des champs produits par chacune des charges.

Exemple :

$$\vec{E}(M) = \sum_i \vec{E}_{\text{produit par } i} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}\vec{u}_i$$



⋆ Ordres de grandeur

Exemple	Données	Ordre de grandeur de $\|\vec{E}\|$
Dans un atome, interaction entre le noyau et un électron	charge du noyau $q \sim e = 1.6 \times 10^{-19}$ C, distance $r \sim 1.0$ Å $= 1.0 \times 10^{-10}$ m	$\|\vec{E}\| \sim \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \sim 10^{11}$ V/m
Champ électrique dans un condensateur, entre les armatures	tension U de qq Volts distance d entre armatures 1 mm ou moins	$\|\vec{E}\| \sim \dfrac{U}{d} \sim 10^4$ V/m
Champ électrique à la surface de la Terre		100 V/m (par temps calme) qq 10^3 V/m (orage)
Champ disruptif de l'air (au delà duquel l'air est ionisé et devient conducteur)		3600 V/cm $= 3.6 \times 10^6$ V/m

I.2 Distribution continue de charges et champ créé

a/ Distribution volumique de charges

La charge électrique est quantifiée : les particules fondamentales ont une charge multiple entier de la charge élémentaire $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C (par exemple charge d'un électron $= -e$, charge d'un proton $= +e$) (exception : les quarks ont des charges de $\pm e/3$ ou $\pm 2e/3$).

La charge électrique est donc répartie dans l'espace de façon discontinue : elle est concentrée là où se situent les particules fondamentales.

Mais pour les grands nombres de particules, on adopte une approche continue. Il faut pour cela se placer à une échelle mésoscopique L grande devant les distances inter-atomiques.

Soit donc $\mathrm{d}\tau$ un volume mésoscopique.

Soit $\mathrm{d}q$ sa charge électrique.

On définit la densité volumique de charge $\rho(M) = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}$. Unité : $\mathrm{C \cdot m^{-3}}$. (schéma)

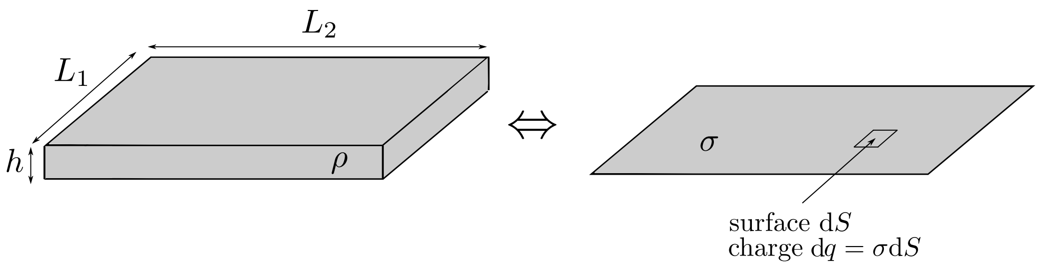
espace 5

Remarques :

- ▷ Si q_1 est la charge de chaque particule (unité : C),
  et n_1 est le nombre de particules par unité de volume (unité : $\mathrm{m^{-3}}$),
  alors on a $\boxed{\rho(M) = q_1 n_1(M).}$
- ▷ S'il y a présence d'un autre type de particule, de charge q_2 et densité numérique n_2,
  alors $\rho(M) = q_1 n_1(M) + q_2 n_2(M)$.

b/ Distribution surfacique de charges

Cas d'une distribution dont l'épaisseur est très petite devant les autres dimensions.



Soit donc dS une surface mésoscopique.

Soit dq sa charge électrique.

On définit la densité surfacique de charge $\sigma(M) = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$. Unité : $\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-2}$. (schéma)

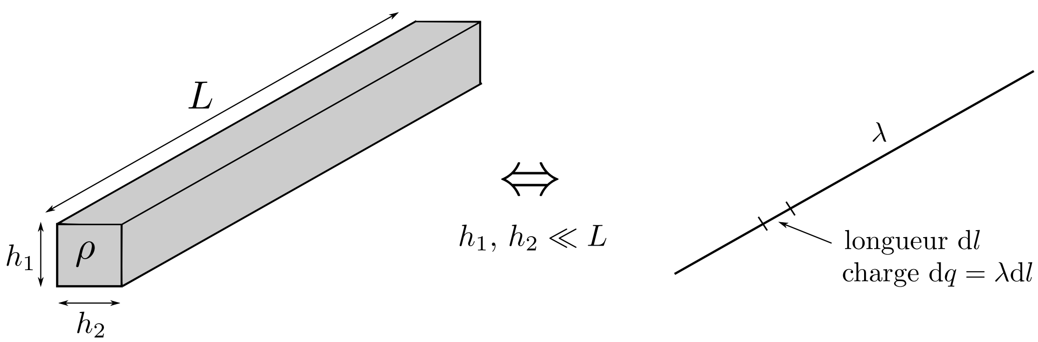
espace 6

Lien entre les descriptions volumiques et surfaciques :

espace 7

c/ Distribution linéique de charges

Cas d'une distribution dont l'épaisseur et la largeur est très petite devant sa longueur.



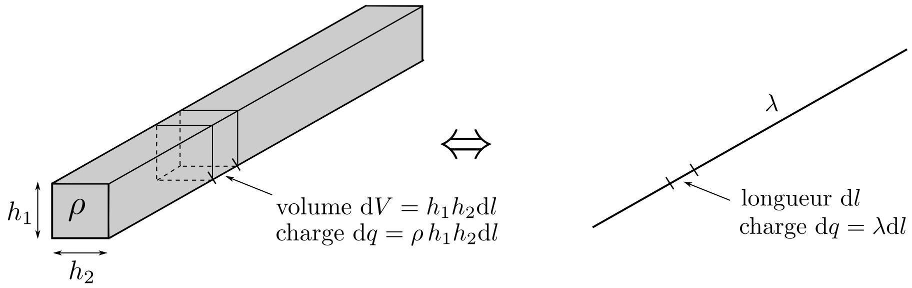
Soit donc dl une longueur mésoscopique.

Soit dq sa charge électrique.

On définit la densité linéique de charge $\lambda(M) = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$. Unité : $\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-1}$.

espace 8

Lien entre les descriptions volumiques et linéiques :



espace 9

⋆ Champ $\vec{E}$ créé par les distributions continues : expression intégrale

On découpe la distribution en éléments mésoscopiques de charge $\mathrm{d}q$.

Chacun produit un champ : $\mathrm{d}\vec{E}(M) = \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 AM^2}\,\vec{u}_{AM}$ (+schéma avec point A dans la distribution)

espace 10

Le principe de superposition permet alors d'écrire :

- ▷ Distribution volumique, $\mathrm{d}q = \rho(A)\mathrm{d}V$:

espace 11

- ▷ Distribution surfacique, $\mathrm{d}q = \sigma(A)\mathrm{d}S$:

espace 12

- ▷ Distribution linéique, $\mathrm{d}q = \lambda(A)\mathrm{d}l$:

espace 13

I.3 Symétries et invariances de la distribution de charges, conséquences sur $\vec{E}$

⋆ Principe de Curie

Le principe de Curie énonce que :

Les symétries et invariances des causes se retrouvent dans les effets.

Ici :

- ▷ Les causes sont : les distributions de charges.
- ▷ Les effets sont : la force exercée sur une charge q. Comme $\vec{F} = q\vec{E}$, raisonner sur la force ou sur le champ revient au même.

a/ Symétries

⋆ Définitions :

Soit un plan. Soit P un point quelconque. Soit $P' = \mathrm{sym}(P)$ le symétrique de P par rapport au plan.

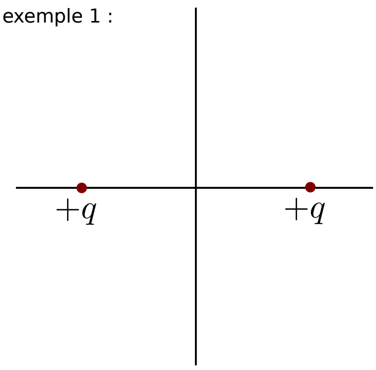
- ▷ Le plan est un plan de symétrie de la distribution de charges si pour tout point P de l'espace, la charge en P est égale à la charge en P'.
- ▷ Le plan est un plan d'antisymétrie de la distribution de charges si pour tout point P de l'espace, la charge en P est l'opposée de la charge en P'.

La même chose mais résumée dans un tableau :

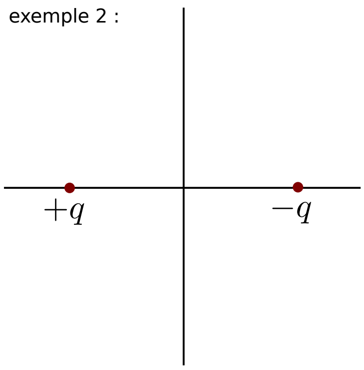
Type de plan	Notation pour désigner ce plan	Conditions à remplir
Plan de symétrie de la distribution de charges	Π	$\forall\ P,\ \rho(P') = \rho(P)$.
Plan d'antisymétrie de la distribution de charges	Π^*	$\forall\ P,\ \rho(P') = -\rho(P)$.

Exemples :
$\rightsquigarrow_{14}$ Indiquer les plans de symétries et d'antisymétrie de la distribution de charge sur les trois cas ci-dessous.

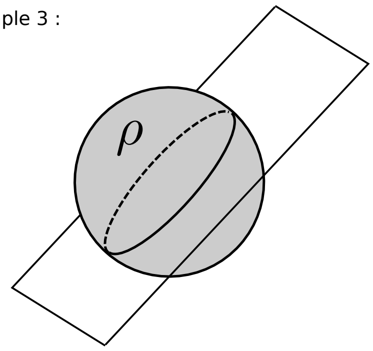
exemple 1 :



exemple 2 :



exemple 3 :



⋆ Propriétés :

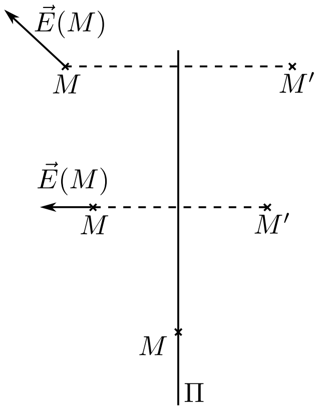
► Π plan de symétrie de la distribution de charges $\Rightarrow$ les vecteurs $\vec{E}(M)$ sont symétriques par rapport au plan Π

En particulier, si $M \in \Pi$, alors $\vec{E}(M)$ est dans le plan Π.

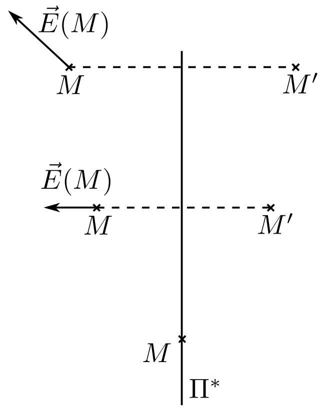
► Π^* plan d'antisymétrie de la distribution de charges $\Rightarrow$ les vecteurs $\vec{E}(M)$ sont antisymétriques par rapport au plan Π^*
En particulier, si $M \in \Pi^*$, alors $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire au plan Π^*.

espace 15

Exemples :
$\rightsquigarrow_{16}$ Tracer le champ électrique en M' sur les figures ci-dessous.



plan de symetrie
de la distribution de charges

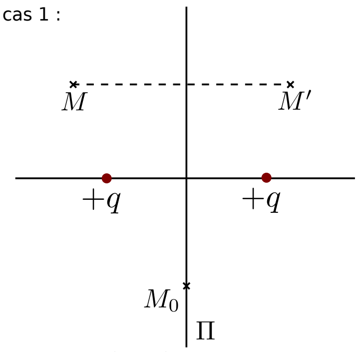


plan d'antisymetrie
de la distribution de charges

⋆ Démonstration sur un exemple :

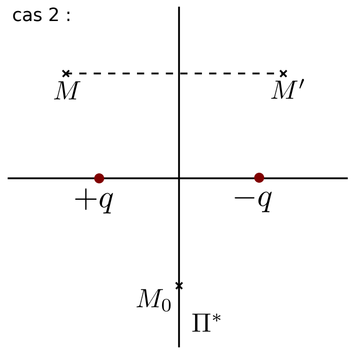
On considère les deux exemples particuliers ci-dessous.
$\rightsquigarrow_{17}$ Sans utiliser le principe de Curie, tracer l'allure du champ électrique en M et M', et conclure sur l'accord avec les propriétés énoncées ci-dessus.
Faire de même pour le point M_0 qui est situé dans le plan.

cas 1 :



plan de symetrie
de la distribution de charges

cas 2 :



plan d'antisymetrie
de la distribution de charges

b/ Invariances

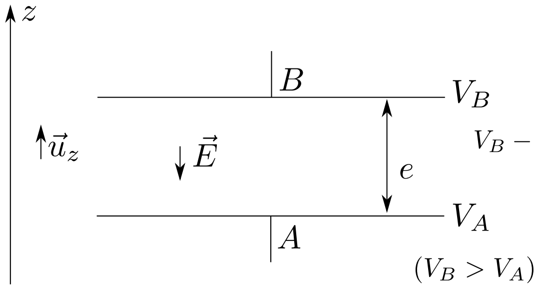
Système de coordonnées choisi	Distribution de charges invariante par	Les composantes de $\vec{E}$ ne dépendent
Coordonnées cartésiennes (x, y, z)	Translation selon l'axe x	pas de x
	Translation selon l'axe y	pas de y
	Translation selon l'axe z	pas de z
Coordonnées cylindriques (r, θ, z)	Translation selon l'axe z	pas de z
	Rotation d'angle θ (autour de l'axe z)	pas de θ
Coordonnées sphériques (r, θ, φ)	Rotation d'angle θ (autour du point O)	pas de θ
	Rotation d'angle φ (autour du point O)	pas de φ

c/ Exemples

Exemples du plan infini uniformément chargé et de la boule uniformément chargée.

II Le potentiel électrostatique V

II.0 Ce que l'on connaît déjà



$V_B - V_A =$ difference de potentiel $\Rightarrow$ existence d un champ $\vec{E}$
donne par $\|\vec{E}\| = \dfrac{V_B - V_A}{e}$ (V/m)
et dirige vers les bas potentiels

Objectif de ce qui suit : montrer l'existence du potentiel V, trouver son lien mathématique avec $\vec{E}$.

II.1 Circulation de $\vec{E}$ et potentiel V

a/ Circulation de $\vec{E}$

On définit la circulation du champ $\vec{E}$ le long d'un contour $\mathcal{C}$ comme :

$$C_{A\to B,\mathcal{C}} = \int_{A,\mathcal{C}}^{B} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} \quad (+\text{schéma})$$

Si le contour est fermé, on note :

$$C_{\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} \quad (+\text{schéma})$$

Il faut préciser l'orientation du contour par un schéma.

espace 18

Exemple pour une charge ponctuelle :

On aboutit à $C_{A\to B,\mathcal{C}} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\dfrac{1}{r_B} + \dfrac{1}{r_A}\right)$.

On en conclut que cette circulation est (i) indépendante du chemin suivi entre A et B, elle ne dépend que des positions de A et B ; (ii) nulle si $A = B$ et donc si le contour est fermé.

Le principe de superposition permet de généraliser ce résultat à toute distribution de charges :

- La circulation du champ électrostatique $\vec{E}$ entre deux points A et B fixes ne dépend pas du chemin suivi.

(schéma)

- La circulation sur un contour fermé est nulle.

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = 0$$

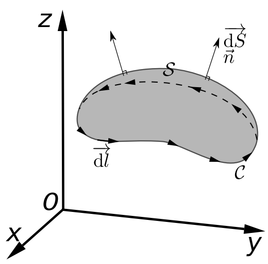
espace 20

b/ Définition du potentiel électrostatique V

Intermède mathématique

Rotationnel : Voir la fiche sur l'analyse vectorielle page 5 pour sa définition et son expression.

Théorème de Stokes-Ampère :



Soit un champ vectoriel $\vec{E}$ quelconque (pas forcément le champ électrostatique). Soit $\mathcal{C}$ un contour fermé orienté. Soit $\mathcal{S}$ une surface qui s'appuie sur le contour $\mathcal{C}$, orientée dans le sens direct par rapport à $\mathcal{C}$ (règle de la main droite). On a l'égalité suivante :

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint_{\mathcal{S}} (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}.}$$

Conséquences :

On a vu que le champ électrostatique vérifie la propriété suivante : $\forall\ \mathcal{C}$ fermé, $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = 0$.

Avec le théorème de Stokes-Ampère, on en déduit que : $\forall\ \mathcal{S}$, $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = 0$.

Et donc $\forall\ M,\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$.

espace 21

Intermède mathématique

Théorème : si un champ vectoriel $\vec{A}$ vérifie $\forall\ M,\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{0}$, alors il existe une fonction scalaire f telle que $\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$.

Conclusion dans notre cas :

Il existe une fonction V telle que en tout point, $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ (on met un moins pour des raisons pratiques).

V est appelé le potentiel électrostatique.

espace 22

> À connaître : en coordonnées cartésiennes, $\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \dfrac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x + \dfrac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y + \dfrac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$.

> **Intermède mathématique**
> Soit V une fonction scalaire quelconque.
>
> On a $\overrightarrow{\text{grad}}\, V \cdot \overrightarrow{\text{d}l} = \text{d}V$, et donc :
> $$\int_{A,\mathcal{C}}^{B} \overrightarrow{\text{grad}}\, V \cdot \overrightarrow{\text{d}l} = \int_{A,\mathcal{C}}^{B} \text{d}V = V_B - V_A.$$
>
> espace 23

Conséquence :

$$\int_{A,\mathcal{C}}^{B} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{d}l} = \int_{A,\mathcal{C}}^{B} -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \cdot \overrightarrow{\text{d}l} = -\int_{A,\mathcal{C}}^{B} \text{d}V = -(V_B - V_A).$$

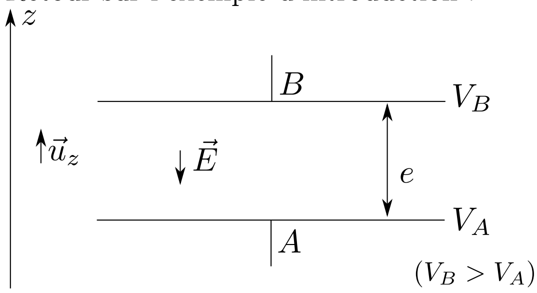
c/ Bilan à retenir

Le champ **électrostatique** vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall\, \mathcal{C}$ fermé, $\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{d}l} = 0$.
- $\forall\, M$, $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E} = \vec{0}$.
- Il existe V tel que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$
- $\int_{A,\mathcal{C}}^{B} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{d}l} = -(V_B - V_A)$

> **Exemple :**
> On considère le potentiel $V(x, y, z) = \dfrac{V_0 x^2}{2L}$. En déduire l'expression du champ électrostatique correspondant.
>
> espace 24

Retour sur l'exemple d'introduction :



espace 25

II.2 Potentiel électrostatique pour une charge ponctuelle

a/ Une seule charge

On considère une charge q ponctuelle.
On utilise les coordonnées sphériques centrées sur la charge.

espace 26

b/ Plusieurs charges

On peut utiliser le principe de superposition : le potentiel total au point M est donné par la somme des potentiels créés par chacune des charges.

III Lignes de champ, tubes de champ, surfaces équipotentielles

III.1 Définitions

- **Ligne de champ :** C'est une courbe tangente en tout point M au vecteur $\vec{E}(M)$.
- **Tube de champ :** Soit $\mathcal{C}$ un contour fermé. L'ensemble des lignes de champs passant par $\mathcal{C}$ forment un tube, appelé tube de champ.

Exemples :

espace 27

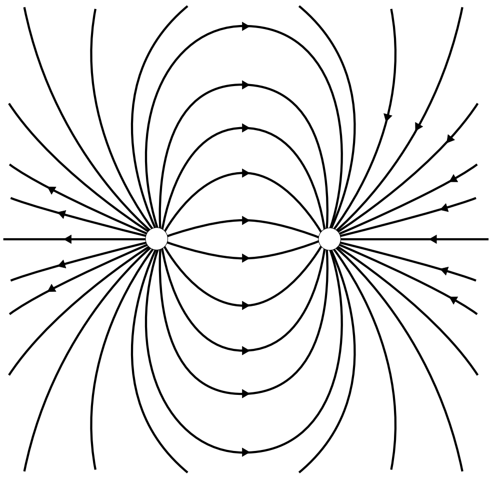
- **Surface équipotentielle :** C'est une surface continue sur laquelle $V = \text{cst}$.

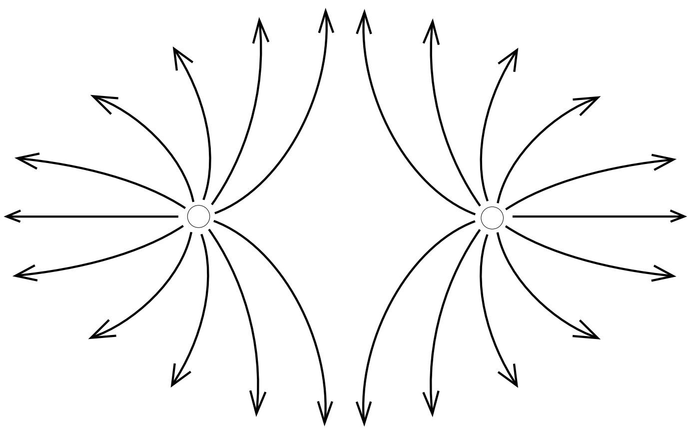
Exemple :

espace 28

Autres exemples :

⋆ **Lignes de champ pour deux charges placées en regard**





À compléter : le signe des charges, et l'allure des équipotentielles. Mettre en évidence des plans de symétrie ou d'antisymétrie.

III.2 Liens entre lignes de champ et surfaces équipotentielles

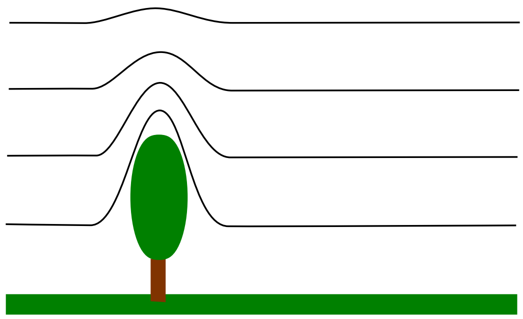
Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$, on a les propriétés suivantes :

- Le long d'une ligne de champ, V décroît.
- Les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.
- Si les équipotentielles se resserrent, alors $\|\vec{E}\|$ augmente.
- $\vec{E}$ pointe vers les bas potentiels.

Remarque : Lorsque l'on trace des équipotentielles, il faut également qu'elles respectent les symétries du problème.

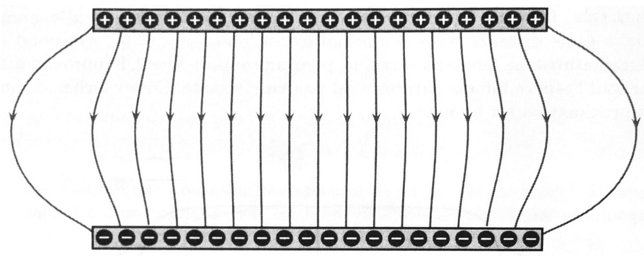
Autres exemples :

⋆ Effet de pointe : équipotentielles au dessus du sol en présence d'un arbre



On indique que le potentiel est minimum au niveau du sol. À compléter : tracer des vecteurs $\vec{E}$ (attention à rendre compte du fait que $\vec{E}$ n'est pas uniforme). Conclure en cas de foudre.

⋆ Lignes de champ pour deux plans de charges opposées



Ceci modélise la situation dans un condensateur. On remarque que "loin" des bords, les lignes de champ sont toutes selon le même axe, ce qui justifie de négliger les effets de bord dans ce domaine de l'espace. À compléter : tracer quelques équipotentielles.

Démonstration des propriétés (n'est pas à savoir faire) :

⋆ Pour la propriété 1 :
On considère un point M sur une ligne de champ, et un point M' un peu plus loin sur cette même ligne. On note $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \overrightarrow{MM'}$. On a :

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \cdot \mathrm{d}l = -\mathrm{d}V = -(V(M') - V(M)).$$

Or suit la ligne de champ, donc on a $\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} > 0$, et donc $V(M') < V(M)$: V décroît le long d'une ligne de champ.

⋆ Propriétés 2, 3 et 4 :
Mathématiquement, le gradient de V est le vecteur perpendiculaire aux surfaces iso-V, orienté vers les V croissants, dont la norme est proportionnelle à la "pente" de V dans cette direction.
Comme ici le gradient de V n'est autre que $-\vec{E}$, on en déduit immédiatement les propriétés 2, 3 et 4.

IV Énergie potentielle électrostatique

Rappels de mécanique :

Soit un objet décrit par une masse m ponctuelle.

- Cet objet est soumis à une force conservative lorsque, pour un déplacement $\mathrm{d}l$, le travail de cette force s'écrit $\delta W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\mathrm{d}E_p$,

  avec E_p l'énergie potentielle dont dérive la force.
- Si l'objet est soumis à des forces conservatives uniquement, alors l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$ est constante au cours du mouvement.

On considère une masse m, de charge q, supposée ponctuelle.

Elle est soumise à la force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}(M)$.

Question : cette force est-elle conservative ? Quelle est l'expression de l'énergie potentielle associée ?
Calculons $\delta W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$.
$\delta W = q\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -q\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -q\mathrm{d}V = -\mathrm{d}(qV)$.

espace 29

La force électrostatique agissant sur une charge q est conservative.
Elle dérive de l'énergie potentielle $\boxed{E_{p,\text{élec}} = qV(M).}$

espace 30