Correction – TD – Induction

III Inductance mutuelle : modèle du transformateur idéal

1 - ⋆ Circuit 1 :

On considère d'abord le flux φ_1 à travers une seule spire (un seul tour du fil).

D'après la règle de la main droite, la normale est vers le haut, donc dans le même sens que l'orientation choisie pour le flux total dans une section Φ. Donc $\varphi_1 = +\Phi$.

L'enroulement primaire comporte N_1 spires, donc le flux total à travers ce circuit primaire est $\boxed{\Phi_1 = N_1\Phi}$.

⋆ Circuit 2 :

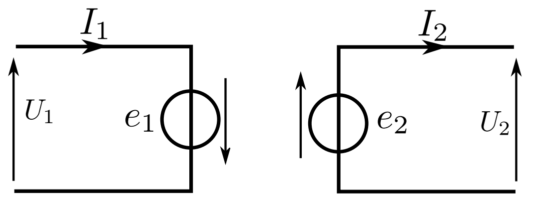
Notons de même le flux φ_2 à travers une seule spire (un seul tour du fil).

La normale est vers le bas, donc dans le même sens que l'orientation choisie pour le flux total dans une section Φ. Donc $\varphi_2 = +\Phi$.

L'enroulement primaire comporte N_2 spires, donc le flux total à travers ce circuit primaire est $\boxed{\Phi_2 = N_2\Phi}$.

2 - Il y a deux enroulements donc deux circuits électriques équivalents : un pour le primaire, un pour le secondaire.

Pour chacun, on remplace l'enroulement par un générateur de fem donnée par la loi de Faraday, orienté en convention générateur.



On a $\boxed{e_1 = -\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = -N_1\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}}$, et $\boxed{e_2 = -\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} = -N_2\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}}$.

3 - D'après les deux expressions précédentes, on a $\frac{e_1}{N_1} = \frac{e_2}{N_2}$, soit encore $\boxed{\frac{e_2}{e_1} = \frac{N_2}{N_1}}$.

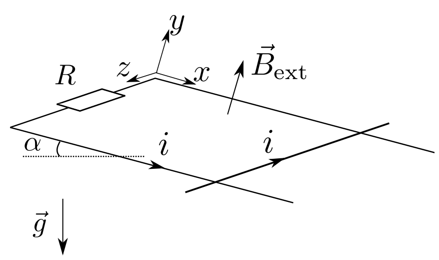
On établit enfin les équations électriques en écrivant la loi des mailles dans chacun des deux circuits : $U_1 + e_1 = 0$ et $U_2 = e_2$.

On a donc finalement $\boxed{\frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1}}$. Il s'agit là de la relation classique pour le modèle du transformateur idéal.

4 - On a d'après l'énoncé $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$, donc $U_1\, i_1 = U_2\, i_2$, et donc $\boxed{\frac{i_2}{i_1} = \frac{U_1}{U_2} = -\frac{N_1}{N_2}}$.

V Principe de la conversion mécanique → électrique : rail de Laplace [● ● ○]

Pour poursuivre la discussion il faut orienter le circuit. On choisit le sens ci-contre, qui est tel que la normale sortante soit dans le même sens que $\vec{B}_{\text{ext}}$.



1 - Les rails étant inclinés, la barre mobile va glisser vers le bas, donc vers les x croissants.

Lorsque la barre glisse, la surface du circuit augmente. Donc le flux Φ de $\vec{B}_{\text{ext}}$ à travers le circuit (qui est > 0 d'après notre choix) va augmenter.

D'après la loi de Faraday, ceci va créer une force électromotrice $-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ négative. Cette fem étant dans le sens de i, ceci signifie que le courant sera en fait négatif.

Enfin, ce courant (et le champ $\vec{B}_{\text{ext}}$) va produire sur la barre une force de Laplace orientée selon $-\vec{e}_x$. Ceci va donc retenir la barre. C'est conforme à la loi de modération de Lenz, qui indique que les effets (ici la force de Laplace) s'opposent aux causes qui les ont créés (ici la cause est le glissement de la barre mobile) : la force de Laplace s'oppose au glissement de la barre.

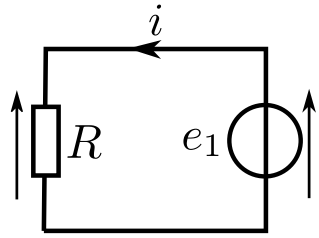
Remarque : On pouvait en dire moins et rester plus "intuitif" en énonçant seulement la loi de Lenz.

2 - ⋆ Étape 1 : orienter. C'est déjà fait.

⋆ Étape 2 : Flux du champ $\vec{B}_{\text{ext}}$ à travers le circuit :

$$\Phi = \iint_S \vec{B}_{\text{ext}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_S (B_{\text{ext}}\vec{e}_y) \cdot (\mathrm{d}S\vec{e}_y) = B_{\text{ext}} \iint_S \mathrm{d}S = B_{\text{ext}} \times ax.$$

⋆ Étape 3 : Schéma électrique équivalent.
On ajoute une fem est en convention générateur, qui remplace en quelque sorte la barre mobile. Le reste est inchangé.
La fem est donnée par la loi de Faraday :
$e_1 = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -B_{\text{ext}}a\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -Bav$ avec v la vitesse de la barre selon $\vec{e}_x$.



⋆ Étape 4 : Loi des mailles, donc ici $e_1 = Ri$, soit l'équation électrique :

$$\boxed{-B_{\text{ext}}av = Ri.}$$

Comme $v > 0$ (la barre glisse vers le bas), on voit avec cette égalité que $i < 0$.

3 - Liste des forces :

- Force de Laplace, $\vec{F}_{\text{L}} = ia\vec{u} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$, avec $\vec{u}$ vecteur sur la barre dans le sens de i, donc ici $\vec{u} = -\vec{e}_z$.

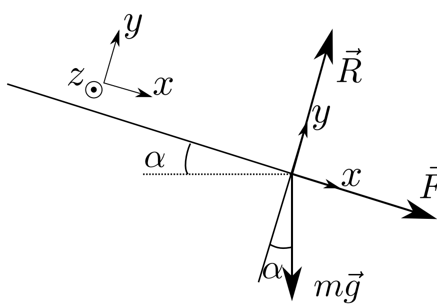
  On a donc $\vec{F}_{\text{L}} = -ia\vec{e}_z \wedge \vec{e}_y B_{\text{ext}} = iaB_{\text{ext}}\vec{e}_x$.

- Poids de la barre $\vec{P} = m\vec{g}$.

  Attention, $\vec{g}$ est à la fois selon x et y. On a en fait

  $$\vec{P} = mg(-\cos\alpha\vec{e}_y + \sin\alpha\vec{e}_x).$$

- Réaction du support $\vec{R} = R\vec{e}_y$.



D'autre part, la vitesse est $\vec{v} = v\vec{e}_x$.

Le pfd indique que $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\text{L}} + \vec{P} + \vec{R}$,

$$\text{soit} \quad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x = iaB_{\text{ext}}\vec{e}_x + mg(-\cos\alpha\vec{e}_y + \sin\alpha\vec{e}_x) + R\vec{e}_y.$$

On s'intéresse à la composante selon $\vec{e}_x$:

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = iaB_{\text{ext}} + mg\sin\alpha.} \quad \text{(équation mécanique)}$$

4 - Dans l'équation mécanique, on remplace le courant i par l'expression $i = -B_{\text{ext}}av/R$ donnée par l'équation électrique. On a donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{(aB_{\text{ext}})^2}{mR}v + g\sin\alpha.}$$

Sur cette équation on vérifie que le terme en g est > 0 et fait bien augmenter la vitesse, alors que le terme dû au phénomène d'induction est < 0 et freine la barre (conformément à la loi de Lenz).

5 - **a -** Le temps τ qui apparait dans l'équation ci-dessus est $\boxed{\tau = \dfrac{mR}{(aB_{\text{ext}})^2}}$.

On a alors une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants, et le régime permanent est atteint au bout de quelque fois τ (penser à la charge d'un condensateur).

b - On se place en régime permanent, où les grandeurs ne varient plus. On a donc $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, et l'équation sur v indique que

$$0 = -\frac{(aB_{\text{ext}})^2}{mR}\, v + g\sin\alpha, \quad \text{soit} \quad \boxed{v = \frac{mRg\sin\alpha}{(aB_{\text{ext}})^2}}.$$

On peut vérifier plusieurs choses sur cette dernière égalité : si $\alpha = 0$ (pas d'inclinaison), alors $v = 0$; plus B_{ext} est élevé plus cette vitesse finale est faible (le champ B freine la barre) ; plus g est grand plus la vitesse finale est grande, etc.

Enfin, le courant est

$$\boxed{i = -\frac{B_{\text{ext}}av}{R} = -\frac{mg\sin\alpha}{aB_{\text{ext}}}}.$$

c - ⋆ Puissance mécanique reçue par la tige mobile suite à la force de pesanteur :

$$\mathcal{P}_{\text{méca reçue par tige}} = m\vec{g}\cdot\vec{v} = m\vec{g}\cdot v\vec{e}_x = mgv\sin\alpha = mg\left(\frac{mRg\sin\alpha}{(aB_{\text{ext}})^2}\right)\sin\alpha.$$

⋆ Puissance électrique reçue par la résistance R :

$$\mathcal{P}_{\text{élec reçue par R}} = Ri^2 = R\left(\frac{mg\sin\alpha}{aB_{\text{ext}}}\right)^2$$

⋆ Conclusion : en simplifiant les deux expressions ci-dessus, on voit qu'on a l'égalité $\boxed{\mathcal{P}_{\text{méca reçue par tige}} = \mathcal{P}_{\text{élec reçue par R}}}$.

On voit donc que toute la puissance fournie mécaniquement au système (ici la puissance fournie par la force de pesanteur) est transformée en puissance électrique (ici reçue par la résistance). On a donc transformé de l'énergie mécanique en énergie électrique, et avec une efficacité de 100% dans ce modèle (qui néglige des pertes, par frottements par exemple).