Partie V : électromagnétisme
Révisions 1$^{\text{ère}}$ année

TD – Induction

Remarque : exercice avec $\star$: exercice particulièrement important, à maîtriser en priorité (de même que les exemples de questions de cours des “ce qu'il faut savoir faire”) | [• ○ ○] : difficulté des exercices

Méthodes

Méthode : Établir l'équation électrique d'un circuit siège de phénomènes d'induction :

1 - Orienter : Si ce n'est pas déjà fait, préciser le sens choisi pour le courant. Ceci fixe alors l'orientation du contour, ainsi que celle de la normale à la surface qui s'appuie sur le contour (règle de la main droite).

2 - Exprimer le flux $\Phi_{\text{tot}} = \Phi_{\text{ext}} + \Phi_{\text{propre}}$ du champ magnétique à travers le circuit. (Attention, son signe va dépendre du sens de la normale au contour.)

Ce flux inclut :

- le flux du champ magnétique imposé par l'extérieur $\vec{B}_{\text{ext}}$: $\Phi_{\text{ext}} = \iint_{\text{S circuit}} \vec{B}_{\text{ext}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$,
- le flux propre (flux du champ $\vec{B}$ créé par le circuit à travers lui-même) :
  $\Phi_{\text{propre}} = \iint_{\text{S circuit}} \vec{B}_{\text{produit par le circuit}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$.
  Il s'écrit aussi $\Phi_{\text{propre}} = L\,i$, avec L l'inductance propre du circuit.
  On néglige ou non Φ_{propre} selon les cas.

3 - Schéma électrique équivalent : Faire un schéma électrique équivalent où apparaissent :

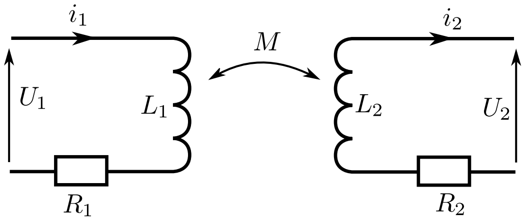
- Le courant dans le même sens que précédemment.
- Un générateur de force électromotrice (fem) induite, *orienté dans le sens du courant*, dont la tension est donnée par la loi de Faraday : $\boxed{e = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t}.}$
- Si précisé, la résistance R du circuit.

4 - Loi des mailles : Écrire enfin l'équation électrique (en appliquant une loi des mailles).

Remarque : Si le circuit comporte des parties mobiles (rail de Laplace, moteur électrique), alors il faut aussi établir **l'équation mécanique** : calcul de la force ou du moment dû aux actions de Laplace sur les parties mobiles, puis application du principe fondamental de la dynamique.

I Autoinductance et inductance mutuelle [$\bullet \circ \circ$]

On considère deux circuits couplés magnétiquement. La constante de couplage est notée M. Attention, le signe de M dépend de l'orientation des courants i_1 et i_2, et on conservera donc celle de la figure. L'inductance propre de chaque circuit est notée L_1 et L_2.
On suit les étapes de la méthode "établir l'équation électrique d'un circuit" (sauf qu'ici il y a deux circuits), d'où la numérotation qui commence à 2 pour coïncider avec les étapes :



2 - Donner l'expression du flux du champ magnétique total à travers le circuit 1, en fonction de i_1, i_2, et de L_1 et M. On rappelle qu'il s'agit la somme du flux propre (du champ créé par 1 passant à travers 1) et du flux externe (du champ créé par 2 passant par 1).

Faire de même pour le flux à travers le circuit 2.

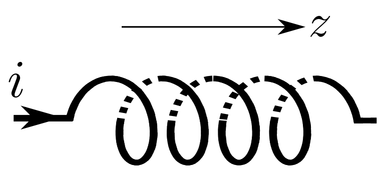
3 - Faire un schéma électrique équivalent du circuit, qui fait apparaître les générateurs de tension e_1 et e_2 dus au phénomène d'induction. *On rappelle qu'ils sont orientés dans le sens du courant.* Donner l'expression des tensions induites e_1 et e_2.

4 - En déduire les deux équations électriques qui régissent le fonctionnement de ce circuit.

II Autoinductance : inductance propre d'une bobine [$\bullet \circ \circ$]

On considère le composant électronique "bobine", que l'on modélise comme un enroulement de N spires sur une longueur l d'axe z, avec un rayon a.
Lorsque cette bobine est parcourue par un courant i, il se crée un champ magnétique $\vec{B}$ dont on suppose que l'expression est $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_?$ (ceci suppose que l'on néglige les effets de bords, voir démonstration dans le cours de cette année), avec $n = N/l$ et $\vec{e}_?$ un vecteur unitaire dont on précisera qui il est étant donné le sens de parcours du courant sur la figure ci-dessous.

1 - Expression du coefficient d'autoinduction



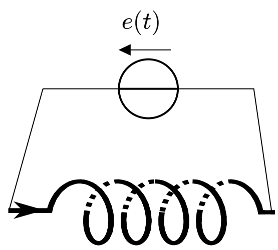
a - Dessiner l'allure des lignes de champ dans la bobine.

b - Rappeler la définition du flux propre du champ magnétique dans la bobine, puis donner son expression en fonction de μ_0, n, i, et du volume $V = \pi a^2 l$ de la bobine.

c - Donner enfin l'expression du coefficient d'autoinduction L en fonction de μ_0, n, et du volume de la bobine.

2 - Utilisation dans un circuit

On place un générateur de tension variable $e(t)$ aux bornes de l'enroulement de spires. On note R la résistance totale du circuit. On respectera les conventions de la figure.



a - Faire un schéma électrique équivalent dans lequel la bobine est remplacée par une force électromotrice e_{fem} (point 3 de la méthode : le schéma électrique équivalent).

Établir alors l'équation électrique du montage.

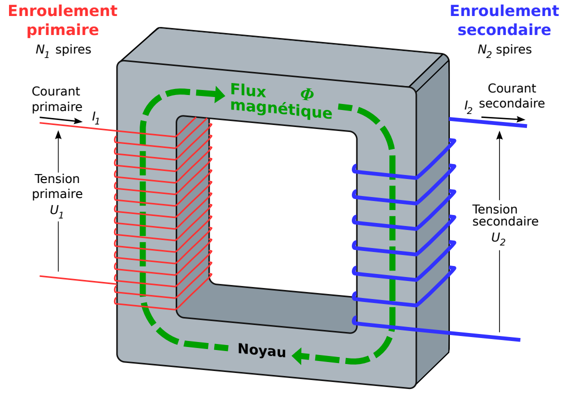
b - Obtient-on un résultat cohérent avec l'expression habituelle utilisée en électrocinétique ?

III Inductance mutuelle : modèle du transformateur idéal [• • ○]

Un schéma de transformateur est présenté ci-contre. Le noyau est un matériau magnétique qui canalise les lignes de champ magnétique entre le circuit primaire et le secondaire. On supposera, dans le cadre du modèle idéal, qu'il n'y a aucune perte de flux : aucune ligne de champ ne sort du noyau. Ainsi, le flux magnétique ϕ est le même pour toute section droite du noyau. On l'appelle le flux commun. Il est dû à la fois au champ produit par l'enroulement primaire et au champ produit par l'enroulement secondaire.
On négligera également toute résistance.

1 - Exprimer le flux du champ magnétique à travers le circuit 1 en fonction de Φ et de N_1. On prendra garde au fait que ce flux est à travers la normale au circuit 1, dont le sens est donné en fonction du courant par la règle de la main droite.

Faire de même pour le flux à travers le circuit 2.



2 - Faire un circuit électrique équivalent, où apparaissent les tensions induites e_1 et e_2 (orientées correctement, point 3 de la méthode).

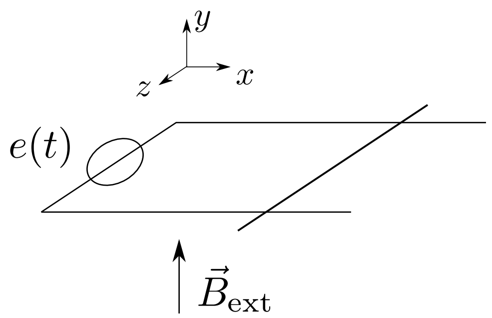
Donner l'expression de ces tensions à l'aide de la loi de Faraday.

3 - En déduire une relation entre e_2 et e_1 (c'est-à-dire l'équation électrique du circuit), puis entre U_1 et U_2. Encore une fois, attention aux signes...

4 - Dans le modèle idéal, la puissance dans le primaire se retrouve intégralement dans le secondaire. En déduire une relation entre les courants i_1 et i_2.

IV Principe de la conversion électrique → mécanique : rail de Laplace [• ○ ○]

On considère le dispositif des rails de Laplace schématisé ci-contre. La longueur du rail mobile entre les deux points de contact est notée a.
Le champ magnétique extérieur $\vec{B}_{\text{ext}}$ est constant et uniforme à travers le circuit. Pour $t < 0$ le générateur ne fournit pas de tension. Puis à partir de $t = 0$ il fournit une tension constante E_0.



1 - L'orientation du générateur n'est pas précisée. On voudrait que le flux de $\vec{B}_{\text{ext}}$ à travers le circuit orienté soit positif. Orienter le générateur pour que ce soit le cas.

2 - Équation mécanique

a - Donner l'expression de la résultante des forces qui s'exerce sur la tige mobile. En quel point s'applique-t-elle ?

b - Établir l'équation du mouvement sur $\vec{v}$ de la tige. On néglige tout frottement.

c - La résoudre dans l'hypothèse où le courant i est constant.
En pratique, le courant i est-il constant ? Pourquoi ?

3 - Équation électrique

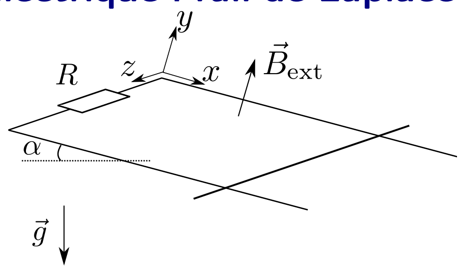
Afin de connaître l'évolution du courant, il faut établir l'équation électrique du circuit équivalent.

a - Suivre les étapes de la méthode pour établir l'équation électrique du circuit (équation sur i, qui fera aussi intervenir la position x de la barre ou ses dérivées). On note R la résistance électrique totale du circuit.

4 - Utiliser les deux équations précédentes (électrique et mécanique) pour aboutir à une équation différentielle sur la vitesse de la barre. La résoudre.

V Principe de la conversion mécanique → électrique : rail de Laplace [●●○]

On considère le dispositif des rails de Laplace schématisé ci-contre. Il est incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. La longueur du rail mobile entre les deux points de contact est notée a.
Le champ magnétique extérieur $\vec{B}_{\text{ext}}$ est constant et uniforme à travers le circuit.



1 - Expliquer intuitivement ce qu'il va se produire (création d'un courant ? dans quel sens ? quel effet sur le rail ?)

2 - Suivre la méthode pour établir l'équation électrique du circuit. Quel va être le signe de i d'après cette équation ?

3 - Établir ensuite l'équation mécanique. On négligera tout frottement. On commencera par poser le problème avec un schéma sur lequel figurent toutes les forces en présence. Puis on se demandera quel est l'axe qui nous intéresse pour le mouvement en question afin de projeter.

4 - En déduire enfin une équation portant sur la vitesse de la tige.

5 - On se place en régime permanent, où les grandeurs ne varient plus.

- **a -** Quel temps caractéristique faut-il attendre pour que ce soit le cas ?
- **b -** Donner alors l'expression de la vitesse et du courant.
- **c -** Effectuer un bilan de puissance en comparant la puissance mécanique reçue par la tige suite à l'action de la pesanteur, et la puissance électrique reçue par la résistance R (qui symbolise un appareil électrique quelconque que l'on souhaite alimenter). Conclure en revenant sur le titre de l'exercice.