Partie IV : optique
Chapitre 3

TD – Interférences à N ondes et réseaux

Remarque : exercice avec ⋆ : exercice particulièrement important, à maîtriser en priorité (de même que les exemples de questions de cours des “ce qu'il faut savoir faire”) | [• ◦ ◦] : difficulté des exercices

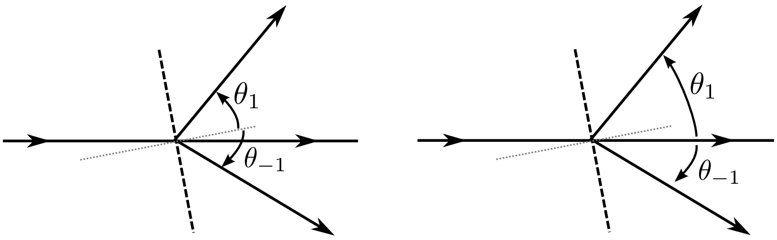
I Vrai-faux/qcm ⋆ | [• ◦ ◦]

1 - Comment varie l'écart angulaire entre l'ordre 0 et l'ordre 1 :

- lorsque l'on diminue le pas du réseau ?
- lorsque l'on augmente la longueur d'onde de la lumière incidente ?
- lorsque l'on éloigne l'écran ?

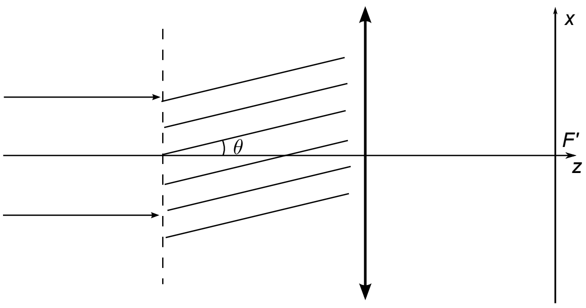
2 - (V/F) Un réseau dévie plus fortement un rayon monochromatique bleu qu'un rayon monochromatique rouge. C'est l'inverse pour un prisme.

3 - Quel est le schéma sur lequel les angles sont correctement placés, et donc pour lequel on a la formule des réseaux $\sin\theta_p - \sin\theta_0 = p\,\dfrac{\lambda}{a}$?



4 - Dans un dispositif de type spectromètre, la position d'une raie sur le capteur CCD est donnée par la formule $x = \dfrac{f\lambda}{a}$, avec f et λ des constantes. La grandeur a est le pas du réseau utilisé. On suppose que a peut varier de Δa (c'est une incertitude). Donner l'expression correspondante de Δx, variation de la position x de la raie sur l'écran.

II Le réseau utilisé comme spectromètre ⋆ | [• ◦ ◦]



On utilise un réseau pour analyser un faisceau monochromatique de longueur d'onde λ_0. Ce faisceau est parallèle, et éclaire le réseau avec une incidence normale. On note a le pas du réseau.

L'écran est placé dans le plan focal image de la lentille (focale $f' = 300\,\text{mm}$).

On exploite uniquement l'ordre 1.

1 - Donner la relation entre la position x de la tache lumineuse due à l'ordre 1 en fonction de λ_0, f', et de a.

On supposera les angles petits, si bien que $\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta$ (vérifier à la calculatrice si c'est bien le cas, par exemple comparer ceci pour $\theta \simeq x/f' \simeq 10/30$).

2 - En général on ne connaît pas précisément le pas a du réseau. On le détermine donc à l'aide d'une source étalon, dont on connaît précisément la longueur d'onde. Prenons par exemple un laser He-Ne (hélium-néon) de longueur d'onde $\lambda_{\text{ref}} = 632.8\,\text{nm}$. On mesure sur l'écran une tache lumineuse en $x_{\text{ref}} = 19.0\,\text{mm}$.

En déduire a, puis le nombre de traits par millimètre du réseau.

3 - On utilise maintenant un laser dont la longueur d'onde λ est inconnue. On mesure un maximum d'intensité en $x = 16.0\,\text{mm}$.

Exprimer λ en fonction de a, f' et x, puis en fonction de λ_{ref}, x_{ref} et x. Faire l'application numérique.

4 - Enfin, on utilise une lampe spectrale au mercure comme source.

On observe sur l'écran plusieurs taches. Pourquoi ?

La plus lumineuse est verte, et est située à une hauteur $x = 16.4\,\text{mm}$. Quelle est la longueur d'onde de cette raie ?

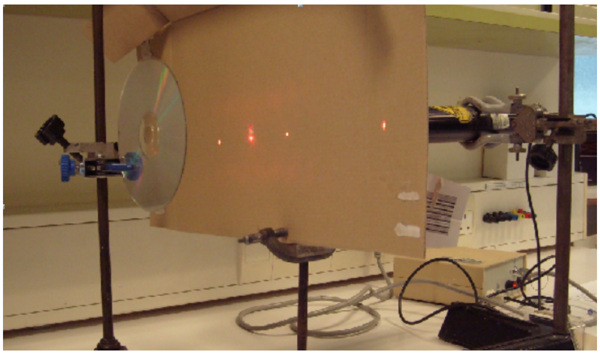
5 - Pour être plus précis, on enregistre l'éclairement sur un capteur CCD. La précision sur la position des maxima atteint alors $\Delta x = \pm 0.1\,\text{mm}$.

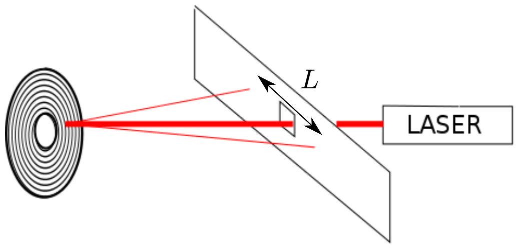
Quelle est alors la précision sur la mesure de la longueur d'onde ?

6 - On prend maintenant comme source une lumière blanche. Qu'observe-t-on à l'écran ?

III Détermination du pas d'un CD ou d'un DVD [● ○ ○]

On réalise l'expérience prise en photo puis schématisée ci-dessous :





1 - Expliquer ce qu'il se passe.

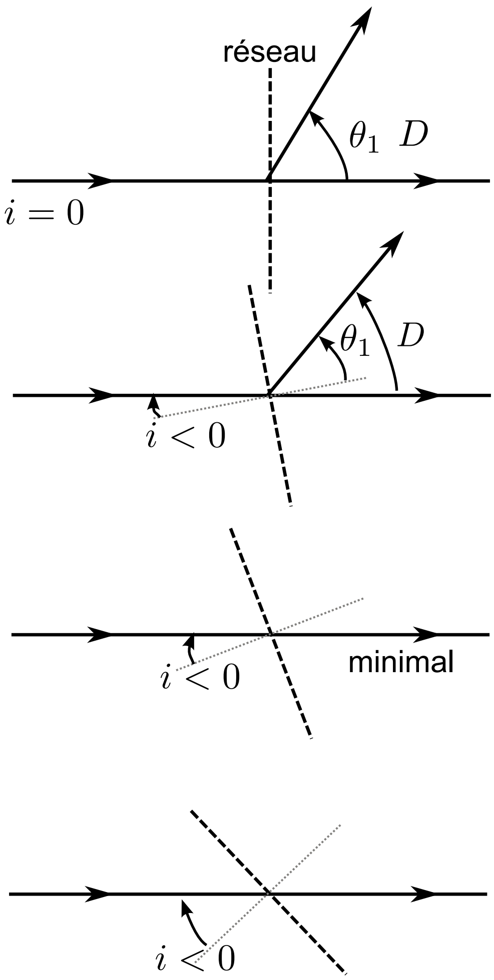
2 - On utilise un laser Helium-Néon de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 633\,\text{nm}$. La distance CD-écran est de 25.5 cm. On mesure sur l'écran une distance $L = 22.8\,\text{cm}$ entre les deux points les plus proches encadrant le faisceau central.

En déduire la distance entre deux sillons d'un CD.

Remarque : on peut faire de même avec un DVD, on trouve une distance inter-sillons environ deux fois moindre.

IV Minimum de déviation pour un réseau [• • ○]

On considère un faisceau lumineux parallèle, monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0, arrivant sur un réseau de pas a. Le réseau est fixé sur un support qui peut tourner selon l'axe Δ perpendiculaire au plan de la feuille.
Pour un ordre n donné en sortie du réseau, on note D l'angle de déviation entre le faisceau correspondant à cet ordre et le faisceau incident.
On note par ailleurs i l'angle entre la normale au réseau et le faisceau incident, et θ_n l'angle entre le faisceau correspondant à l'ordre n et la normale au réseau (voir schéma).



1 - Montrer que $D = \theta_n - i$.

2 - Montrer que l'angle de déviation D admet un minimum lorsque l'on fait tourner le réseau autour de la direction Δ (donc lorsque l'on fait varier i), que l'on notera D_m, et qui vérifie la relation $2\sin\dfrac{D_m}{2} = n\dfrac{\lambda_0}{a}$.

3 - Compléter les deux derniers schémas de la figure ci-contre.

4 - Quel est l'intérêt expérimental du minimum de déviation ?

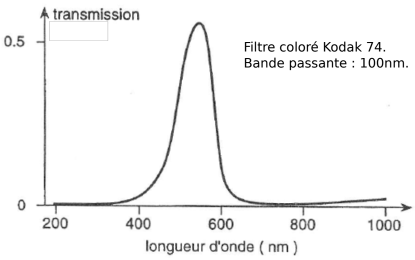
5 - À l'aide d'un réseau placé sur un goniomètre (voir TP prochain), on peut mesurer D_m précisément pour chaque raie d'une lampe spectrale. Pour la première raie jaune du sodium on mesure $D_{m1} = 16.935°$ avec un réseau de 500 traits par mm. En déduire la longueur d'onde correspondante.

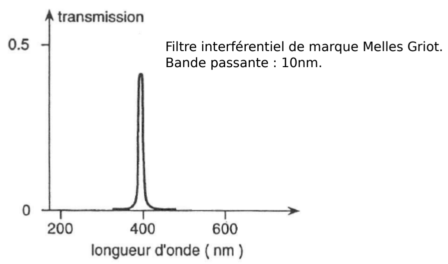
6 - Quelle est la valeur de D_{m2} pour la seconde raie jaune, dont on sait qu'elle est à $\lambda = 589.6\,\text{nm}$? Écrire $D_{m2} - D_{m1}$ en minutes. Est-ce visible sur un goniomètre de TP ?

V Filtre interférentiel [• • ○]

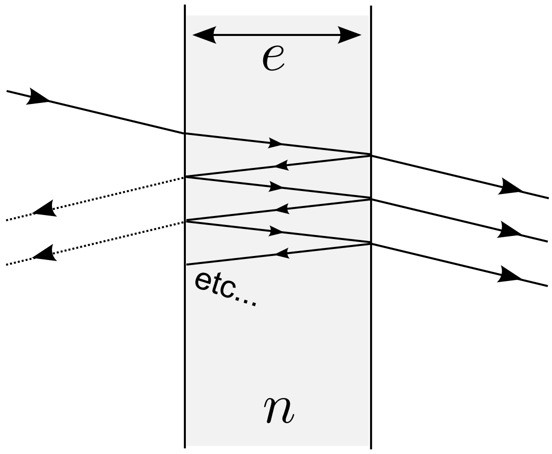
L'objectif d'un filtre optique est de ne laisser passer qu'une gamme étroite de longueurs d'onde autour d'une longueur d'onde choisie λ_1.

Il existe des filtres dits colorés, qui contiennent des pigments qui absorbent la lumière, sauf dans une certaine gamme de longueurs d'onde qui correspond à la couleur du filtre.





Plus performants, les filtres interférentiels sont basés sur le principe des interférences. Cet exercice s'y intéresse. On modélise un tel filtre par une lame de verre d'épaisseur e et d'indice de réfraction $n = 1.5$.



Un rayon lumineux incident est réfléchi de multiples fois, comme sur le schéma, et tous les rayons sortant interfèrent. Sur le schéma les rayons sont dessinés inclinés pour plus de clarté, mais en pratique le filtre doit être utilisé sous incidence normale. On suppose donc que le rayon incident arrive de façon normale. De plus, on ne s'intéresse qu'à la lumière transmise de l'autre coté du filtre.

1 - **a -** En exprimant la différence de marche δ entre deux rayons sortant consécutifs et en raisonnant comme pour la formule des réseaux, montrer que les longueurs d'onde transmises sont celles qui vérifient la relation $\lambda = \dfrac{2ne}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

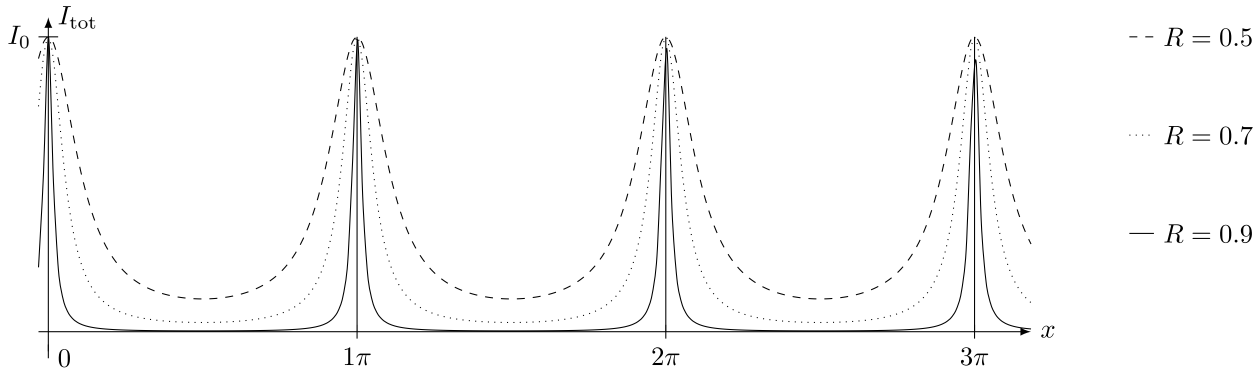
b - On souhaite concevoir un filtre interférentiel qui laisse passer la longueur d'onde $\lambda_1 = 500\,\text{nm}$. Quelle doit être l'épaisseur de la lame de verre pour que ceci corresponde à $k = 1$?
Quelles sont alors les autres longueurs d'onde que le filtre laisse passer ?

Remarque : On trouve un e très faible. En pratique, la lame de verre est réalisée par une fine couche de diélectrique déposée entre deux autres substrats transparents par des techniques spéciales.

2 - On veut maintenant étudier la largeur de la bande passante du filtre, c'est-à-dire la largeur de l'intervalle passant centré en λ_1. On note R le coefficient de réflexion en intensité : à chaque réflexion, l'intensité du rayon réfléchi vaut R fois celle du rayon incident. On peut montrer que l'intensité en sortie, résultant des interférences de tous les rayons sortants, est

$$I_{\text{tot}} = \frac{I_0}{1 + m_0\,\sin^2 x}, \quad \text{avec} \quad m_0 = \frac{4R}{(1-R)^2}, \quad x = \frac{2\pi ne}{\lambda}. \tag{1}$$

I_0 est l'intensité du rayon en entrée.



a - Montrer I_{tot} est bien maximal pour les longueurs d'onde qui vérifient $\lambda = \dfrac{2ne}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, comme anticipé à la question 1.a.

b - À l'aide d'un développement limité, donner l'expression Δx de la largeur à mi-hauteur du pic en $x = 0$ en fonction de R.
Par périodicité de cette fonction, Δx est également la largeur à mi-hauteur de tous les pics.

c - On veut en déduire la largeur à mi-hauteur $\Delta\lambda$ en terme de longueur d'onde. Étant donné que $x = 2\pi ne/\lambda$, donner la relation entre $\Delta\lambda$ et Δx.
Que vaut $\Delta\lambda$ si $R = 0.9$? (on reprendra les valeurs numériques de la question 1.b).
Remarque : De tels coefficients de réflexion peuvent être atteints en déposant une fine couche métallique de part et d'autre de la lame de verre.

3 - Pour finir, on souhaite démontrer la formule 1. Il faut faire une démonstration similaire à celle du cours (partie I.3) : sommer l'amplitude $\underline{s}$ de toutes les ondes en sortie, mais en prenant en compte le fait qu'ici l'amplitude des ondes diminue au fur et à mesure des réflexions.

On note 1 le premier rayon transmis (sans réflexion donc), 2 le second rayon, etc... $k = 1, 2, ...$ désigne donc le $k$ième rayon.

On note $(SM)_k$ le chemin optique entre la source S et le point M où l'on observe, pris le long du rayon k.

On note s_0 l'amplitude de l'onde incidente, et $\underline{s}_{0k}$ celle du rayon transmis numéro k. Lors de la transmission air-verre, de la transmission verre-air, et d'une réflexion ayant lieu dans le verre, l'amplitude de l'onde est multipliée respectivement par un coefficient t, t', r. On a $R = r^2$ et $|tt'| + R = 1$ par conservation de l'énergie.

L'onde correspondant au rayon k s'écrit donc $\underline{s}_k(M,t) = \underline{s}_{0k}\, \exp\left[i\left(-\omega t + \dfrac{2\pi}{\lambda_0}(SM)_k + \varphi_0\right)\right]$.

a - Montrer que $(SM)_k = (SM)_1 + (k-1) \times 2ne$.

b - Montrer que $\underline{s}_{0k} = tt'r^{2(k-1)}s_0$.

c - Se convaincre que l'onde totale en sortie s'écrit $s_{\text{tot}}(M,t) = \sum_{k=1}^{N} \underline{s}_k(M,t)$ avec $N \to +\infty$.
Manipuler cette somme pour se ramener à la somme des termes d'une suite géométrique. Puis faire tendre N vers l'infini en exploitant le fait que $R < 1$.
On doit alors aboutir à $\underline{s}_{\text{tot}}(M,t) = s_0\,(1-R)^2\,e^{i\times\text{quelque chose}} \times \dfrac{1}{1 - R\,e^{2ix}}$, avec $x = 2\pi ne/\lambda_0$.
Avec quelques autres manipulations, obtenir l'expression 1 pour I_{tot}.