

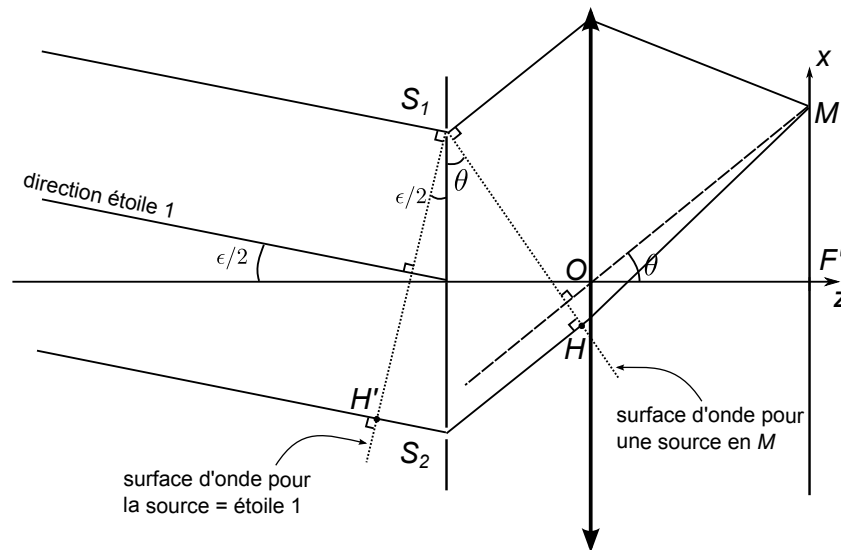
## Correction – DM 14 – Principe de l'interférométrie stellaire

1 - Les deux étoiles sont deux sources réelles distinctes. Elles n'émettent pas les mêmes trains d'onde en même temps. Elles sont donc incohérentes.

On pourra donc calculer séparément l'intensité produite par chacune, puis sommer ces intensités.

2 - **Remarque** : C'est un peu la même démonstration que pour l'exercice IV du TD (trous d'Young avec une source décalé de  $+X_0$ ).

On se réfère au schéma ci-dessous :



★ Soit  $S_{*1}$  la position de l'étoile 1. La différence de marche est  $\delta_M = (S_{*1}S_1M) - (S_{*1}S_2M)$ .

★ Or :

- Le plan  $S_1H'$  est une surface d'onde pour la source en  $S_{*1}$  (d'après le théorème de Malus). Donc on a  $(S_{*1}S_1) = (S_{*1}H')$ .
- Le plan  $S_1H$  est une surface d'onde pour une source placée en  $M$  (principe du retour inverse de la lumière et théorème de Malus). Donc  $(MS_1) = (MH)$ .

On a donc  $\delta_M = -(H'S_2) - (S_2H) = -H'S_2 - S_2H$ .

★ Exprimons d'abord  $H'S_2$  : dans le triangle  $S_1H'S_2$  on a  $\sin \frac{\epsilon}{2} = \frac{H'S_2}{S_1S_2} = \frac{H'S_2}{a}$ . Or les angles sont petits donc on a  $\frac{\epsilon}{2} \simeq \sin \frac{\epsilon}{2} = \frac{H'S_2}{a}$ , et enfin  $H'S_2 = a \frac{\epsilon}{2}$ .

★ Exprimons ensuite  $S_2H$  : dans le triangle  $S_1S_2H$ , on a  $\sin \theta = \frac{S_2H}{a}$ . Donc  $S_2H = a \sin \theta \simeq a\theta$ .

On a ensuite dans le triangle  $OF'M$  :  $\tan \theta = \frac{x}{f'}$ , donc  $\theta \simeq \frac{x}{f'}$ .

Finalement,  $S_2H = \frac{ax}{f'}$ .

★ On a donc  $\delta_M = -a \frac{\epsilon}{2} - \frac{ax}{f'}$ , soit  $\delta_M = - \left( \frac{x}{f'} + \frac{\epsilon}{2} \right) a$ .

★ Pour en déduire l'éclairement on utilise la formule de Fresnel. Ici l'intensité produite par chaque trou est identique, notée  $I_0$ . Donc  $I_{*1} = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_M \right) \right]$ .

Donc on a bien  $I_{*1}(x) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \left( \frac{x}{f'} + \frac{\epsilon}{2} \right) a \right) \right]$ .

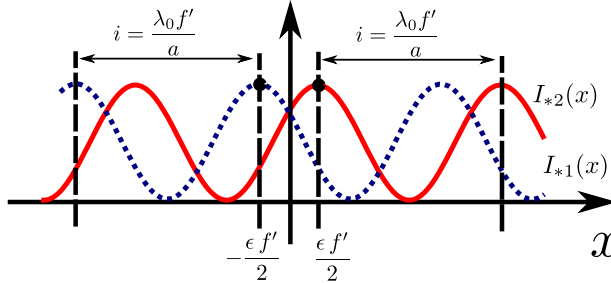
3 - Pour exprimer  $I_{*2}(x)$  dû à l'étoile 2, il suffit de remplacer  $\epsilon$  par  $-\epsilon$ .

On a donc 
$$I_{*2}(x) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \left( \frac{x}{f'} - \frac{\epsilon}{2} \right) a \right) \right].$$

4 - Il faut comprendre que l'expression de  $I_{*2}(x)$  montre qu'il s'agit de la figure d'interférences habituelle (qu'on obtient si  $\epsilon = 0$ ) décalée de  $+\epsilon f'/2$  (car c'est la valeur pour laquelle s'annule l'argument du cosinus); et que l'expression de  $I_{*1}(x)$  montre qu'il s'agit de cette même figure mais décalée de  $-\epsilon f'/2$ .

En revanche l'interfrange est le même et vaut  $i = \frac{\lambda_0 f'}{a}$  (les cosinus sont du type  $\cos \left[ \frac{2\pi}{T}(t - t_0) \right]$ ).

On a donc le graphique suivant :



On imagine ensuite que si on augmenta  $a$ , l'interfrange de chaque intensité diminue, ce qui va changer le déphasage entre les deux cosinus. Il peut alors arriver un moment où les maxima de l'un coïncident avec les minima de l'autre. A ce moment là, la somme des deux intensités est constante : il n'y a plus de franges, le contraste est nul.

On verra mieux pourquoi avec le calcul qui suit.

5 -

$$\begin{aligned} I_{\text{tot}}(x) &= 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \left( \frac{x}{f'} + \frac{\epsilon}{2} \right) a \right) \right] + 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \left( \frac{x}{f'} - \frac{\epsilon}{2} \right) a \right) \right] \\ &= 4I_0 + 2I_0 \left[ \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \left( \frac{x}{f'} + \frac{\epsilon}{2} \right) a \right) + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \left( \frac{x}{f'} - \frac{\epsilon}{2} \right) a \right) \right] \\ &= 4I_0 + 2I_0 \left[ 2 \cos \left( \frac{2\pi a x}{\lambda_0 f'} \right) \cos \left( \frac{\pi \epsilon a}{\lambda_0} \right) \right] \end{aligned}$$

$$I_{\text{tot}}(x) = 4I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{\pi a \epsilon}{\lambda_0} \right) \cos \left( \frac{2\pi a x}{\lambda_0 f'} \right) \right]$$

★ L'expression du contraste est  $C = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}}$ . Il faut donc exprimer  $I_{\text{max}}$  et  $I_{\text{min}}$ .

Dans l'expression de  $I_{\text{tot}}(x)$ , le seul cosinus qui varie est celui qui contient  $x$ .  $I_{\text{tot}}(x)$  est maximal lorsque ce cosinus vaut  $+1$ , et minimal lorsqu'il vaut  $-1$ .

On a donc  $I_{\text{max}} = 4I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{\pi a \epsilon}{\lambda_0} \right) \right]$ , et  $I_{\text{min}} = 4I_0 \left[ 1 - \cos \left( \frac{\pi a \epsilon}{\lambda_0} \right) \right]$ .

Donc finalement 
$$C = \cos \left( \frac{\pi a \epsilon}{\lambda_0} \right).$$

★ Il s'annule lorsque  $\frac{\pi a \epsilon}{\lambda_0} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}$  (et non pas  $\mathbb{Z}$  car  $a, \lambda_0, \epsilon > 0$ ).

Il y a donc annulation pour des valeurs de  $a$  données par 
$$a_k = \frac{\lambda_0}{\epsilon} \left( \frac{1}{2} + k \right), k \in \mathbb{N}.$$

6 - La première annulation du contraste est donnée pour  $a_0 = \frac{\lambda_0}{2\epsilon}$ .

On en déduit 
$$\epsilon = \frac{\lambda_0}{2a_0} = 2.73 \times 10^{-7} \text{ rad.}$$

7 - Pour  $a = 200 \text{ m}$  on a 
$$\epsilon = \frac{\lambda_0}{2a_0} = 1.6 \times 10^{-9} \text{ rad.}$$

Ceci correspondait à un détail de 60 cm observé sur la Lune depuis la Terre. On voit donc que par cette méthode on peut détecter des écarts angulaires très faibles.

À cause de la diffraction, avec un seul télescope de diamètre  $d$ , l'image d'une source ponctuelle à l'infini est une tache de demi diamètre angulaire  $\theta \simeq d/\lambda_0$ . Pour séparer les taches de diffraction formées par chacune des étoiles, il faut donc, d'après le critère de Rayleigh, que  $2\theta < \epsilon$ .

La résolution angulaire maximale pour un télescope de diamètre  $d$  est donc  $\epsilon = 2d/\lambda_0$ .

Pour atteindre  $\epsilon = 1.6 \times 10^{-9} \text{ rad}$ , il faut donc  $d = \epsilon \lambda_0 / 2 = 500 \text{ m!}$  (Pour comparaison, le projet du Télescope géant européen, prévu d'ici 2025, envisage un diamètre de 39 m.)