

## Correction – TD – Transferts d'énergie par conduction thermique

### I Vrai-faux/qcm

★ | [● ○ ○]

1 - (V/F) On redonne la formule :  $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$ .

Pour raisonner intuitivement, on rappelle que  $R_{th}$  permet de calculer le flux thermique :  $\Phi_{th} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$ .

- Augmente si  $S$  augmente ? Faux, elle diminue si  $S$  augmente. La formule le montre. Intuitivement, on comprend que si la surface d'échange augmente, alors le flux thermique augmentera également, c'est donc la résistance est plus faible (moins de résistance, moins d'isolation).

- Augmente si  $L$  augmente ? Vrai. La formule le montre. Intuitivement, on comprend que plus le matériau est épais, plus il isole, et donc plus sa résistance thermique est grande.

- Augmente si  $\lambda$  augmente ? Faux, elle diminue. La formule le montre. Intuitivement, on comprend que plus la conductivité thermique du matériau est grande, mieux il conduit la chaleur, et donc plus sa résistance aux transferts est faible.

2 - La diffusivité thermique  $\kappa$  est en  $m^2/s$ .

Cette unité permet de dire que si un problème de diffusion thermique fait apparaître une longueur caractéristique  $L$  et un temps caractéristique  $\tau$ , alors on a  $\kappa = L^2/\tau$ .

On peut réécrire ceci  $\tau = L^2/\kappa$ . On voit que si on double la taille d'un système, la propagation d'un front chaud dans tout le système prendra  $2^2 = 4$  fois plus de temps.

3 - (V/F) Faux. C'est le cas en régime permanent, si en plus la situation est unidimensionnelle sans source ni perte. (Par exemple dans l'exercice sur l'ailette de refroidissement on a une situation stationnaire, unidimensionnelle, mais à cause des pertes sur les côtés le profil n'est pas linéaire.)

4 -  $\vec{j}_{th}$  : densité de flux thermique,  $W \cdot m^{-2}$ ;

$\Phi_{th}$  : flux thermique, W, on a  $\Phi_{th} = S \times j_{th}$  si 1D;

$\lambda$  : conductivité thermique,  $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ , apparaît dans la loi de Fourier;

$\kappa$  : diffusivité thermique,  $m^2 \cdot s^{-1}$ , apparaît dans l'équation de la chaleur;

$T$  : température, K;

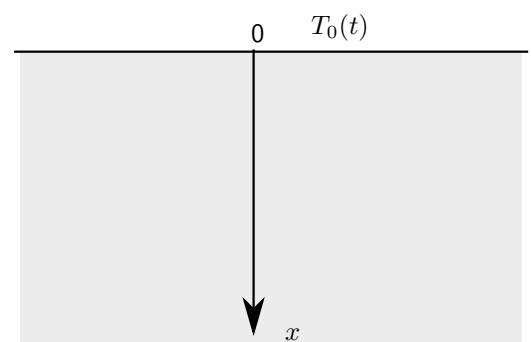
$R_{th}$  : résistance thermique, apparaît dans  $T_1 - T_2 = R_{th} \Phi_{th}$  (schéma en convention récepteur pour les signes);

$h$  coefficient conducto-convectif,  $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ , apparaît dans la loi de Newton  $\Phi_{th} = S h (T_{paroi} - T_{fluide})$ .

### V Régime non stationnaire – Onde thermique dans le sol

[● ● ○]

...



1 - Voir cours.

2 - a - On part de l'expression  $\underline{\theta}(x, t) = \underline{\theta}_0 \exp\{j(\omega t - \underline{k}x)\}$ , et on calcule  $\left(\frac{\partial \underline{\theta}}{\partial t}\right)_x$ . Il faut comprendre que l'on dérive par rapport à  $t$ , en traitant  $x$  comme une variable fixe. On a donc :

$$\left(\frac{\partial \underline{\theta}}{\partial t}\right)_x = \underline{\theta}_0 j\omega \exp\{j(\omega t - \underline{k}x)\}.$$

On procède de même pour la dérivée par rapport à  $x$ , cette fois à  $t$  fixé :

$$\left(\frac{\partial \underline{\theta}}{\partial x}\right)_t = \underline{\theta}_0 (-j\underline{k}) \exp\{j(\omega t - \underline{k}x)\},$$

et on dérive une seconde fois :

$$\left(\frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial x^2}\right)_t = \underline{\theta}_0 (-j\underline{k})(-j\underline{k}) \exp\{j(\omega t - \underline{k}x)\} = -\underline{\theta}_0 \underline{k}^2 \exp\{j(\omega t - \underline{k}x)\},$$

b - l'équation de la chaleur est  $\left(\frac{\partial \underline{\theta}}{\partial t}\right)_x = \kappa \left(\frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial x^2}\right)_t$ .

On utilise les deux expressions précédentes pour les dérivées partielles. On voit tout de suite que les facteurs  $\underline{\theta}_0$  se simplifient, tout comme les exponentielles. Il reste donc :

$$j\omega = \kappa \times (-\underline{k}^2), \quad \text{soit } \boxed{\underline{k}^2 = -\frac{j\omega}{\kappa}}.$$

c - Il s'agit de trouver la racine carrée d'un nombre complexe. On suit l'indication. On a  $j = e^{j\pi/2}$ , et donc  $-j = e^{-j\pi/2}$  (en prenant le complexe conjugué).

On a donc  $\underline{k}^2 = -\frac{j\omega}{\kappa} = \frac{\omega}{\kappa} e^{-j\pi/2}$ .

D'où  $\underline{k} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} e^{-j\pi/4} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \left(\cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4}\right) = \pm \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} (1 - j)$ .

Ceci s'écrit aussi  $\boxed{\underline{k} = \pm \left(\frac{1}{\delta} - \frac{j}{\delta}\right)}$  avec  $\delta = \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}}$ .

On remarque que  $k$  est homogène à l'inverse d'une longueur, et donc que  $\delta$  est homogène à une longueur.

3 - a - On reprend maintenant l'expression  $\underline{\theta}(x, t) = \underline{\theta}_0 \exp\{j(\omega t - \underline{k}x)\}$ , et on remplace  $\underline{k}$  par l'expression précédente. Commençons par le cas avec un signe plus :

$$\begin{aligned} \underline{\theta}(x, t) &= \underline{\theta}_0 \exp \left\{ j \left[ \omega t - \left( \frac{1}{\delta} - \frac{j}{\delta} \right) x \right] \right\} \\ &= \underline{\theta}_0 \exp \{j\omega t\} \times \exp \left\{ -j \frac{x}{\delta} - \frac{x}{\delta} \right\} \\ &= \underline{\theta}_0 \exp \{j(\omega t - x/\delta)\} \times \exp \left\{ -\frac{x}{\delta} \right\} \end{aligned}$$

Cette solution est physiquement possible. Si on essaie avec le signe moins pour l'expression de  $\underline{k}$ , on trouve une solution en  $\exp \left\{ +\frac{x}{\delta} \right\}$ , qui diverge vers  $+\infty$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , ce qui n'est pas possible.

b - La solution  $\theta(x, t)$  est la partie réelle de  $\underline{\theta}(x, t)$  écrite précédemment.

Nous allons supposer que la constante  $\underline{\theta}_0$  est réelle.

On a donc  $\boxed{\theta(x, t) = \theta_0 \cos(\omega t - x/\delta) \times \exp \left\{ -\frac{x}{\delta} \right\}}$ .

Il s'agit d'une solution oscillante, mais dont l'amplitude est amortie exponentiellement à mesure que l'on va sous terre. On constate qu'elle est compatible avec la condition aux limites en  $x = 0$ .

- 4 - • Dans le cas d'une variation jour/nuit,  $\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600 \text{ s}} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ , et  $\delta = \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}} = 17 \text{ cm}$ .
- Dans le cas d'une variation saisonnière annuelle,  $\omega = \frac{2\pi}{325.25 \times 24 \times 3600 \text{ s}} = 1.99 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$ ,  
 et  $\delta = \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}} = 3.2 \text{ m}$ .

On cherche ensuite la profondeur à laquelle l'amplitude des variations en surface est divisée par 10 dans chacun des cas. L'amplitude est ce qui est en facteur du cosinus dans l'expression de  $\theta(x, t)$ , donc  $\theta_0 \exp\left\{-\frac{x}{\delta}\right\}$ . En  $x = 0$ , elle vaut  $\theta_0$ .

Elle est divisée par 10 lorsque  $\exp\left\{-\frac{x}{\delta}\right\} = 1/10$ , c'est-à-dire pour  $-x/\delta = \ln(1/10)$ , soit  $x = \delta \ln 10$ .

- On trouve  $x = 38 \text{ cm}$  pour une variation journalière. Ceci signifie que s'il y a une forte gelée sur une journée, le front froid sera atténué d'un facteur 10 à une profondeur de 38 cm. En enterrant les canalisations à une trentaine de centimètre on se prémunit donc contre les gelées ponctuelles. De même, les racines de la végétation sont protégées à ces profondeurs.
- On trouve  $x = 7.3 \text{ m}$  pour une variation annuelle. Ainsi la température dans une grotte ou une cave à cette profondeur ne varie quasiment pas annuellement.

Terminons en remarquant qu'on peut réécrire l'expression de  $\delta$  en faisant apparaître la période  $\tau = 2\pi/\omega$  :  $\delta = \sqrt{\kappa\tau/\pi}$ .

On aurait pu prévoir ce type d'expression en disant que comme  $\tau$  est un temps caractéristique du problème, alors un front froid va pénétrer sur une longueur caractéristique  $\delta$  telle que  $\kappa = \delta^2/\tau$ , soit  $\delta = \sqrt{\kappa\tau}$ .

Ici la résolution exacte du problème permet d'avoir le facteur  $1/\sqrt{\pi}$  et d'avoir la forme exacte des solutions.

## VII Tuyau d'eau chaude – coordonnées cylindriques

[••○]

- 1 - On remarque d'abord que la géométrie n'est pas cartésienne, et qu'on ne peut donc pas appliquer l'équation de la chaleur telle que vue en cours avec le terme  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ .

On suit donc les étapes de la méthode 2 du poly d'introduction pour démontrer une nouvelle équation.

★ On choisit ici des coordonnées cylindriques. Le problème est unidimensionnel car il ne dépend que de la coordonnée  $r$ .

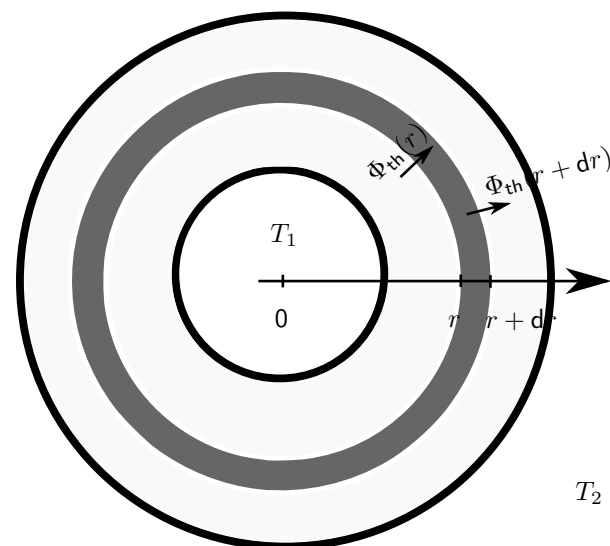
★ On délimite une tranche comprise entre les rayons  $r$  et  $r + dr$ , comme sur le dessin ci-contre, et de longueur  $l$  dans la direction du tuyau (direction perpendiculaire au plan de la feuille).

Le volume de cette tranche est  $dV = l \times 2\pi r dr$ .

- 1 - (suite) On effectue un bilan d'énergie thermique sur ce volume :

$$\begin{aligned} 0 = \delta Q &= \Phi_{\text{th}}(r) - \Phi_{\text{th}}(r + dr) \\ 0 &= j_{\text{th}}(r) S(r) - j_{\text{th}}(r + dr) S(r + dr). \end{aligned} \quad (1)$$

On a utilisé  $\delta Q = 0$  car nous sommes en régime stationnaire et il n'y a pas d'accumulation d'énergie thermique.



Il faut faire attention aux surfaces  $S(r)$  et  $S(r + dr)$ . Leurs expressions sont  $S(r) = 2\pi r \times l$ , et de même pour  $S(r + dr) = 2\pi(r + dr) \times l$ . Pour l'instant, on n'utilise pas leurs expressions. On fait plutôt apparaître un terme de dérivée :

$$\begin{aligned} j_{\text{th}}(r + dr) S(r + dr) - j_{\text{th}}(r) S(r) &= dr \times \left( \frac{j_{\text{th}}(r + dr) S(r + dr) - j_{\text{th}}(r) S(r)}{dr} \right) \\ &= dr \times \left( \frac{d}{dr} [j_{\text{th}}(r) S(r)] \right). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dr} [j_{\text{th}}(r) S(r)] \\ 0 &= \frac{d}{dr} [j_{\text{th}}(r) 2\pi r l] \\ 0 &= \frac{d}{dr} [r j_{\text{th}}(r)] \\ 0 &= \frac{d}{dr} \left[ r (-\lambda) \frac{dT}{dr} \right] \end{aligned}$$

On a utilisé la loi de Fourier dans la dernière ligne. Finalement on a l'équation différentielle suivante pour  $T(r)$  :

$$\boxed{\frac{d}{dr} \left[ r \frac{dT}{dr} \right] = 0.}$$

**Remarque :** D'après l'équation 1, on a  $\Phi_{\text{th}}(r) = \Phi_{\text{th}}(r + dr)$ . C'est donc que  $\Phi_{\text{th}}$  est constant indépendant de  $r$ . C'est identique au cas 1D stationnaire sans sources ni pertes, où  $\Phi_{\text{th}}$  est constant indépendant de  $x$ . En revanche,  $j_{\text{th}}(r)$  n'est pas constant ici, car  $j_{\text{th}}(r) = \Phi_{\text{th}}/S(r)$  et la surface  $S$  dépend du rayon.

2 -

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{dT}{dr} \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \left[ r \frac{dT}{dr} \right] &= A \\ \Leftrightarrow \frac{dT}{dr} &= \frac{A}{r} \\ \Leftrightarrow \boxed{T(r) = A \ln(r) + B} \end{aligned}$$

Nous allons déterminer uniquement la constante  $A$  (seule utile pour la suite) (erreur dans l'énoncé, il n'y a pas de terme en  $1/r^2$ ). En supposant les contacts tuyau-fluide parfaits, on a  $T(R_1) = T_1$  et  $T(R_2) = T_2$ .

On a donc  $A \ln(R_1) + B = T_1$  et  $A \ln(R_2) + B = T_2$ . En faisant la soustraction des deux, on obtient

$$A \ln(R_1) - A \ln(R_2) = T_1 - T_2, \quad \text{soit} \quad \boxed{A = \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}}}.$$

3 - Le flux thermique  $\Phi_{\text{th}}$  qui va vers l'extérieur du tuyau est indépendant de  $r$ . On peut le calculer en  $r = R_1$  par exemple. Il est donné par :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{th}} &= S \times j_{\text{th}} = 2\pi r L \times j_{\text{th}} \\ &= 2\pi r L \times (-\lambda) \frac{dT}{dr} \\ &= -2\pi \lambda L \times A \end{aligned}$$

$$\text{D'où} \quad \boxed{\Phi_{\text{th}} = 2\pi \lambda L \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}}.$$

$$\text{Application numérique :} \quad \boxed{\Phi_{\text{th}} = 3.1 \text{ kW}}.$$

- 4 - On applique le premier principe de la thermodynamique au système ouvert {eau en écoulement dans le tuyau}. On peut car le régime est stationnaire. En négligeant  $\Delta e_c$  et  $\Delta gz$ , on a :

$$\Delta h = w_i + q.$$

Or  $w_i = 0$  car pas de parties mobiles,  $\Delta h = c(T_s - T_e)$ , et  $q = -\Phi_{th}/D_m$ . On a donc

$$T_s - T_e = -\frac{\Phi_{th}}{c D_m} = -6.6^\circ\text{C}.$$

**Remarque :** Dans ce raisonnement, on suppose utilise le  $\Phi_{th}$  calculé précédemment (3.1 kW), qui est valable pour  $T_1 = 80^\circ\text{C}$ . Or si la température de sortie du tuyau est  $T_s = T_e - 6.6^\circ\text{C}$ , ceci signifie que la valeur de  $\Phi_{th}$  change le long du tuyau. En toute rigueur il faudrait prendre ceci en compte.

- 5 - D'après la formule pour  $T_s - T_e$ , on voit qu'on peut jouer sur l'épaisseur de l'isolant (facteur en  $\ln R_2/R_1$ ), sur la conductivité thermique de l'isolant (facteur  $\lambda$ ), ainsi que sur le débit massique : la chute de température diminue si on l'augmente.

## VIII Caractère irréversible de la diffusion thermique

- 1 - À 1D en coordonnées cartésiennes, en l'absence de sources, et en régime stationnaire, l'équation de la chaleur implique que  $T(x)$  est une fonction affine et que  $\Phi(x)$  est indépendant de  $x$ .
- 2 - Second principe de la thermodynamique au système fermé {barreau} entre les instants  $t$  et  $t + dt$  :

$$dS = \delta S_e + \delta S_c.$$

- 3 - En régime stationnaire, les différentes grandeurs ne varient pas dans le temps. On a donc  $S(t + dt) = S(t)$ , et donc  $dS = S(t + dt) - S(t) = 0$ .

L'entropie échangée est donnée par la formule générale  $\delta S_e = \frac{\delta Q_{reçu}}{T_{frontière}}$  avec  $T_{frontière}$  la température de l'interface entre le système et le milieu extérieur, et  $\delta Q_{reçu}$  le transfert thermique reçu par le système à travers cette interface.

Ici il y a deux interfaces où il y a échange de chaleur :

- celle en  $x = 0$  où  $T_{frontière} = T_1$  et  $\delta Q_{reçu} = \Phi dt$  ;
- celle en  $x = L$  où  $T_{frontière} = T_2$  et  $\delta Q_{reçu} = -\Phi dt$ .

On a donc

$$\delta S_e = \frac{\Phi dt}{T_1} - \frac{\Phi dt}{T_2} = \Phi dt \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right).$$

Or on a  $\Phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} = \frac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2)$ , donc

$$\delta S_e = \frac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2) \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) dt.$$

- 4 - Le second principe avec  $dS = 0$  indique que  $\delta S_c = -\delta S_e$ , d'où :

$$\delta S_c = \frac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2) \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) dt.$$

$$\delta S_c = \frac{\lambda S (T_1 - T_2)^2}{L T_1 T_2}.$$

On voit que  $\delta S_c = 0$  si et seulement si  $T_1 = T_2$ , donc si et seulement si il n'y a aucun transfert thermique. Mais à partir du moment où il y a transfert thermique entre deux sources de températures différentes il y a création d'entropie. La conduction thermique est donc un processus irréversible.

5 -  $\delta S_c > 0$  implique que  $\lambda > 0$ , heureusement.

**Remarque :** Raisonnons maintenant en terme d'énergie dégradée. Le transfert thermique entre deux sources aurait pu être exploité pour fournir un travail en faisant fonctionner un moteur entre les deux sources. Pour un transfert thermique  $\delta Q$  extrait de la source chaude, ceci aurait permis de produire au mieux un travail  $\delta W = \delta Q \times (1 - T_1/T_2)$  (pour un moteur réversible). En ne faisant pas ceci, on laisse le transfert thermique se faire et cette énergie n'est plus récupérable : il y a exploitation non optimale de l'énergie, et donc création d'entropie.

On peut vérifier que  $T_1 \delta S_c = T_1 \Phi dt \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = \delta Q (1 - T_1/T_2)$  ce qui donne le travail qu'il aurait été possible d'extraire.

## IX Transport d'iceberg

[•••]

### Résolution de problème

#### 1 – On pose le problème

On fait un schéma. Que va-t-il se passer physiquement ? La glace va fondre car elle est dans un milieu de température supérieure à  $0^\circ\text{C}$ .

L'énergie thermique perdue par la glace va dépendre de  $P_{th}$  donné dans l'énoncé, dans lequel intervient la surface qu'il va falloir estimer. On remarque qu'un iceberg est en grande partie sous l'eau, et que  $h$  pour l'eau est plus grand que  $h$  pour l'air. On va donc supposer que l'iceberg perd de l'énergie thermique uniquement par contact avec l'eau.

On donne un symbole aux grandeurs utiles et on les estime si nécessaire. On fait également des hypothèses.

- Soit  $V_0$  le volume de l'iceberg, et  $m_0 = 10^{10}$  kg sa masse. On a  $\rho_{\text{glace}} \simeq 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, donc  $V_0 \simeq m_0/\rho_{\text{glace}}$ .
- Nous allons supposer que l'iceberg est sphérique. Son rayon est donc  $R = \left( \frac{3}{4\pi} V_0 \right)^{1/3}$ , et sa surface est  $S = 4\pi R^2$ . Avec l'application numérique on trouve  $R = 134$  m (ce qui semble raisonnable) et  $S = 2.2 \times 10^5$  m<sup>2</sup>.
- Dans la formule pour  $P_{th}$ , il faut également connaître la valeur de  $T_{\text{fluide}}$ . On prendra  $T_{\text{fluide}} = 15^\circ\text{C}$ .
- Quant à la glace, on suppose qu'elle est à  $T = 0^\circ\text{C}$ , ce qui permet le changement d'état.

#### 2 – On cherche une stratégie de résolution

Le système considéré est l'iceberg.

On considère la transformation suivante entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$  : fusion d'une masse  $\Delta m$  de glace. Les conditions sont monobares ( $p_{\text{ext}} = \text{cst}$ ) et  $p = p_{\text{ext}}$ , on peut donc appliquer le premier principe version monobare :

$$\Delta H = Q_{\text{reçu}}.$$

- On a d'une part  $Q_{\text{reçu}} = P_{th} \times \Delta t = h(T_{\text{fluide}} - T)S \Delta t$ ,
- et d'autre part  $\Delta H = \Delta m \times h_{\text{fus}}$ .

#### 3 – On met en œuvre la stratégie

On en déduit que

$$\Delta m = \frac{h(T_{\text{fluide}} - T)S \Delta t}{h_{\text{fus}}} = 8.7 \times 10^7 \text{ kg}$$

si on prend  $\Delta t = 24 \text{ h} = 86\,400 \text{ s}$ .

On a donc

$$\boxed{\frac{\Delta m}{m} = 0.8\%}$$

Ceci vaut pour 1 jour, et signifie qu'au bout d'un jour la masse de l'iceberg est  $m_1 = m_0 \times \left(1 - \frac{\Delta m}{m}\right)$ .  
Au bout de 140 jours, la masse de l'iceberg est donc égale à

$$m_{140} = m_0 \times \left(1 - \frac{\Delta m}{m}\right)^{140} = m_0 \times 30\%.$$

#### 4 – On a un regard critique sur les résultats

L'iceberg a donc perdu 70% de sa masse une fois arrivé à destination. Ce résultat semble raisonnable. Il signifie que le projet peut réussir.