Partie II : Thermodynamique et mécanique des fluides
Chapitre 5

Correction – DM 7 – Dispositifs de mesure de vitesse

1. On s'intéresse au dispositif de mesure à dépression.

a - Le débit volumique est le même pour toute section si le fluide est incompressible.

b - La relation de Bernoulli telle qu'écrite ici suppose que le fluide est en écoulement stationnaire, incompressible et parfait.

c - On $gh \simeq 10\text{J/kg}$, et $e_c = \dfrac{1}{2}v^2 \simeq 0.5\text{J/kg}$. On ne peut donc pas négliger le terme en gh devant la variation d'énergie cinétique.

Pour pouvoir écrire la relation de Bernoulli sans le terme de pesanteur, il faut supposer que l'on utilise le dispositif de sorte à ce qu'il soit horizontal (car alors gz est le même des deux cotés de l'égalité et se simplifie).

d - La conservation du débit volumique implique que $D_{v0} = D_{ve}$. Comme le fluide est parfait, la vitesse est uniforme sur toute section droite, donc on a $D_{v0} = S_0\,v_0$ et $D_{ve} = S_e\,v_e$.
On en déduit $S_0\,v_0 = S_e\,v_e$. Or $S_e < S_0$, donc $\boxed{v_e > v_0}$.

On utilise ensuite la relation de Bernoulli, que l'on écrit $\dfrac{p_0 - p_e}{\mu} = \dfrac{1}{2}(v_e^2 - v_0^2)$. Le terme de droite est positif car $v_e > v_0$. Donc on a bien $\boxed{p_0 > p_e}$.

e - Comme écrit à la question précédente, la relation de Bernoulli peut s'écrire $\dfrac{p_0 - p_e}{\mu} = \dfrac{1}{2}(v_e^2 - v_0^2)$. On a donc $v_e^2 - v_0^2 = \dfrac{2\Delta p}{\mu}$.

Il faut une autre relation pour éliminer v_e : la relation de conservation du débit $S_0\,v_0 = S_e\,v_e$ explicitée à la question 1.d.

On a donc $v_e^2 - v_0^2 = \left(\dfrac{S_0}{S_e}\right)^2 v_0^2 - v_0^2 = \left[\left(\dfrac{S_0}{S_e}\right)^2 - 1\right] v_0^2$.

D'où finalement

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\mu\left[\left(\frac{S_0}{S_e}\right)^2 - 1\right]}}.}$$

f - On a $\Delta p = \dfrac{\mu}{2}\left[\left(\dfrac{S_0}{S_e}\right)^2 - 1\right] v_0^2$.

Il faut donc connaître la vitesse v_0 : $v_0 = \dfrac{D_v}{S_0} = \dfrac{D_v}{\pi(d_0/2)^2} = 0.707\,\text{m/s}$.

On prend $\mu = 1.0 \times 10^3\,\text{kg/m}^3$. On a alors $\Delta p = 1.26\,\text{kPa}$, soit

$$\boxed{\Delta p = 1.3\,\text{kPa}.}$$

2. On s'intéresse ensuite à la sonde Pitot.

a - On suppose l'écoulement stationnaire, parfait, et incompressible (ce qui pour de l'air suppose que les vitesses sont subsoniques). On peut donc écrire la relation de Bernoulli le long de la ligne de courant $O'B$ (en négligeant les différences d'altitudes) :

$$\frac{p_{O'}}{\mu} + \frac{1}{2}v_{O'}^2 = \frac{p_B}{\mu} + \frac{1}{2}v_B^2.$$

Et sur la ligne de courant entre O et A :

$$\frac{p_O}{\mu} + \frac{1}{2}v_O^2 = \frac{p_A}{\mu} + \frac{1}{2}v_A^2.$$

On utilise ensuite le fait que $v_B \simeq U$, que les quantités en O et O' sont les mêmes, et que $v_A = 0$, pour avoir :

$$\frac{p_A}{\mu} = \frac{p_B}{\mu} + \frac{1}{2}U^2.$$

$$\text{On a donc bien} \quad \boxed{U = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\mu}}.}$$

A.N. : On prend $\mu = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$ pour l'air. On convertit les km/h en m/s en divisant par 3.6.

On trouve $\boxed{\Delta p = \frac{\mu}{2}U^2 = 3.0 \times 10^4\,\mathrm{Pa.}}$

b - On place l'axe z vers le haut. On considère le schéma ci-dessous.

⋆ L'air est immobile dans les tuyaux qui vont de A à A' et de B à B', car ils sont bouchés au bout par le liquide. On peut donc appliquer la relation de la statique des fluides : $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\mu g$, avec μ constant (car les différences de hauteur sont petites).
On a donc $p_B - p_{B'} = -\mu g(z_B - z_{B'})$, et $p_A - p_{A'} = -\mu g(z_A - z_{A'})$.

⋆ On peut également appliquer la relation de la statique des fluides dans le liquide.
On a dans le liquide $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g$, avec ρ constant (liquide supposé incompressible) Donc

$$p_{A'} - p_{B'} = -\rho g(z_{A'} - z_{B'}) = \rho g h.$$

⋆ On a donc

$$\begin{aligned} p_A - p_B &= (p_A - p_{A'}) + (p_{A'} - p_{B'}) + (p_{B'} - p_B) \\ &= -\mu g(z_A - z_{A'}) + \rho g h - \mu g(z_B - z_{B'}). \end{aligned}$$

Enfin, on néglige les termes contenant μ devant celui contenant ρ, car μ est environ mille fois inférieur à ρ. On a donc l'expression de l'énoncé :

$$\boxed{p_A - p_B = \rho g h.}$$

A.N. : On trouve $p_A - p_B = \frac{\mu}{2}U^2 = 1.157 \times 10^2\,\mathrm{Pa}$, et donc $\boxed{h = \frac{p_A - p_B}{\rho g} = 1.2\,\mathrm{cm}}$, ce qui est parfaitement mesurable expérimentalement.