Partie II : Thermodynamique et mécanique des fluides
Chapitre 3

TD – Fluide en écoulement stationnaire laminaire : viscosité et relation de Bernoulli

I Vrai-faux / questions courtes [● ○ ○]

1 - Le poiseuille, ou $\mathrm{Pa \cdot s}$.

2 - Faux, un écoulement d'air ouvert et de vitesse subsonique est incompressible. On peut alors appliquer le théorème de Bernoulli.

3 - Voir cours.

4 - Voir cours.

5 - Vrai.

II Différentes expressions pour la relation de Bernoulli [● ○ ○]

On note la perte de charge soir Δp_c (homogène à des pascals), soit Δz_c (homogène à des mètres). On note w_i le travail massique indiqué. Parmi les relations suivantes, indiquer lesquelles sont correctes et lesquelles sont fausses. Pour celles qui sont correctes, indiquer ce à quoi elles sont homogènes.

1 - $\dfrac{p_s}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_s^2 + gz_s = \dfrac{p_e}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_e^2 + gz_e$

Correcte. C'est la relation de Bernoulli de base vue en cours.

Homogène à des J/kg, car par exemple $\frac{1}{2}mv^2$ est une énergie en Joule, donc $\frac{1}{2}v^2$ à des J/kg.

2 - $p_s + \dfrac{1}{2}\rho v_s^2 + gz_s = p_e + \dfrac{1}{2}\rho v_e^2 + gz_e$

Non correcte. Il manque un facteur ρ devant les deux termes en gz.

3 - $\dfrac{p_s}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_s^2 + gz_s = \dfrac{p_e}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_e^2 + gz_e - \Delta p_c$

Non correcte. Les termes de pression sont en $\frac{p}{\rho}$, et il faut donc écrire la perte de charge comme $\frac{\Delta p_c}{\rho}$, et non pas Δp_c.

4 - $\dfrac{p_s}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_s^2 + gz_s = \dfrac{p_e}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_e^2 + gz_e - g\Delta z_c$

Correcte. Les termes en z sont de la forme gz, et la perte de charge est également sous la forme $g\Delta z_c$.

Homogène à des J/kg.

5 - $\dfrac{p_s}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_s^2 + gz_s = \dfrac{p_e}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_e^2 + gz_e - \dfrac{\Delta p_c}{\rho}$

Correcte. Les termes de pression sont en $\frac{p}{\rho}$, et la perte de charge est également sous la forme $\frac{\Delta p_c}{\rho}$.

Homogène à des J/kg.

6 - $\dfrac{p_s}{\rho g} + \dfrac{1}{2g}v_s^2 + z_s = \dfrac{p_e}{\rho g} + \dfrac{1}{2g}v_e^2 + z_e - \Delta z_c$

Correcte. On a divisé la relation de base par g. Les termes en z sont seuls, et le terme de perte de charge est bien sous la forme Δz_c.

Homogène à des mètres (car terme en z).

7 - $\dfrac{p_s}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_s^2 + gz_s = \dfrac{p_e}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_e^2 + gz_e + \Delta p_c$

Non correcte pour deux raisons : les termes en pression sont sous la forme $\frac{p}{\rho}$, alors que celui pour la perte de charge est en Δp_c ; et il faudrait un moins pour la perte de charge.

8 - $p_s + \dfrac{1}{2}\rho v_s^2 + \rho gz_s = p_e + \dfrac{1}{2}\rho v_e^2 + \rho gz_e + w_i$

Non correcte. Les termes en p, $\frac{1}{2}\rho v^2$ et ρgz sont homogènes à des J/m^3 (équivalent à des pascals), alors que le travail massique utile w_i est homogène à des J/kg.

9 - $\dfrac{p_s}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_s^2 + gz_s = \dfrac{p_e}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_e^2 + gz_e - w_i$

Non correcte car il faut ajouter le travail massique indiqué à l'entrée, et non pas le soustraire.

10 - $\dfrac{p_s}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_s^2 + gz_s = \dfrac{p_e}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_e^2 + gz_e + w_i$

Correcte. Il s'agit de la relation de base vue en cours.

Homogène à des J/kg.

11 - $p_s + \dfrac{1}{2}\rho v_s^2 + \rho gz_s = p_e + \dfrac{1}{2}\rho v_e^2 + \rho gz_e + \rho w_i$

Correcte. On a multiplié la relation de base pas ρ.

Homogène à des pascals, ce qui est équivalent à des J/m^3.

12 - $p_s + \dfrac{1}{2}\rho v_s^2 + \rho gz_s = p_e + \dfrac{1}{2}\rho v_e^2 + \rho gz_e + \rho w_i - \rho g\Delta z_c$

Correcte. Idem cas précédent, avec en plus la perte de charge sous la forme $\rho g\Delta z_c$, ce qui est cohérent avec la forme ρgz des termes en z.

III Mesure de vitesse d'écoulement par différence de pression [• ○ ○]

1 – Le débit volumique est le même pour toute section si le fluide est incompressible, ce qui est bien supposé ici.

La conservation du débit volumique implique que $D_{v1} = D_{v2}$. Comme le fluide est parfait, la vitesse est uniforme sur toute section droite, donc on a $D_{v1} = S_1\,v_1$ et $D_{v2} = S_2\,v_2$.

On en déduit $\boxed{S_1\,v_1 = S_2\,v_2}$.

2 – On utilise ensuite la relation de Bernoulli écrite le long d'une ligne de courant qui relie les sections 1 et 2 :

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}v_1^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}v_2^2 + gz_2.$$

Le dispositif est horizontal, donc on a $z_1 = z_2$.

On exprime ensuite v_2 en fonction de v_1 : $v_2 = \dfrac{S_1}{S_2}\,v_1$.

On remplace dans l'équation et on isole v_1 :

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[\left(\dfrac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]}}.}$$

IV Hauteur atteinte par un jet d'eau ★ | [• ○ ○]

1 - Point A sur la surface de l'eau en haut, point B au bout du jet d'eau. On a $v_A \simeq 0$. On a $v_B = 0$ par définition puisque le point B est le point où le jet d'eau s'arrête.

$\dfrac{p_0}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_A^2 + gz_A = \dfrac{p_0}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_B^2 + gz_B$, et il ne reste plus que $z_A = z_B$.

2 - Même principe, cette fois il reste $gz_B = gz_A + w_i$, d'où une puissance indiquée à fournir $\Psi_i = D_m w_i = \rho D_v\, g(z_B - z_A) = 11\,\mathrm{W}$.

3 - Cette fois on choisit un point B dans le jet, à une hauteur $z_B = z$.

On a $\dfrac{p_0}{\rho} + 0 + gh = \dfrac{p_0}{\rho} + \dfrac{1}{2}v(z)^2 + gz$, d'où $v(z) = \sqrt{2g(h-z)}$. (On retrouve bien que v s'annule lorsque sa hauteur $z = h$.)

V Vidange d'un réservoir [• • ○]

On doit trouver un temps de vidange $\boxed{t_f = \dfrac{a^2}{b^2}\sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 180\,\mathrm{s}}$ (avec $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$).

VI Bilan de puissance sur une installation [• ○ ○]

On prend $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$.

1 – a –

b – $v_D = 0.85\,\mathrm{m/s}$ et $w_i = \dfrac{1}{2}v_D^2 + \dfrac{p_D - p_A}{\rho} + g(h_2 - h_1) = 340\,\mathrm{J/kg}$

c – $\Psi_i = D_m w_i = \rho D_v w_i = 566\,\mathrm{W}$

2 – a – $R_e = 4.0 \times 10^4$.

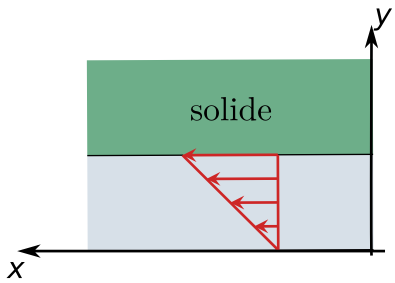
b – $\Delta z_c = 0.10\,\mathrm{m}$.

c –

d –

VII Solide glissant sur un plan incliné et lubrifié [● ● ○]

Oral banque PT



1 – Voir schéma pour les axes.

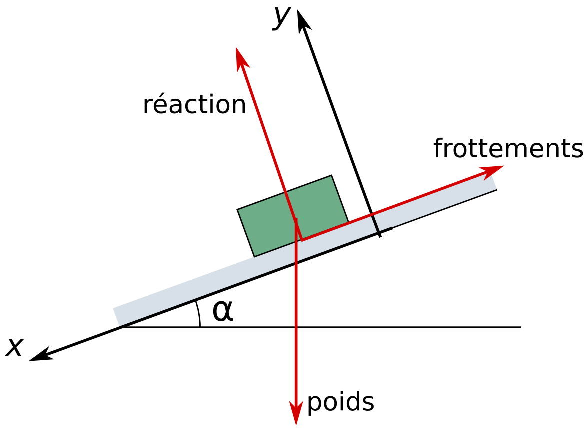
On a alors $\boxed{\vec{v} = v(y)\vec{e}_x = V\dfrac{y}{e}\vec{e}_y,}$ ce qui garantit que $v(0) = 0$ car il y a adhérence sur le plan incliné immobile, et que $v(e) = V$ car il y a adhérence sur le solide en mouvement.

2 – La norme de la force est donnée par $\|\vec{F}\| = \eta S\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = \eta S\dfrac{V}{e}$.

De plus, cette force freine le solide, et est donc dirigée selon $-\vec{e}_x$.

D'où $\boxed{\vec{F} = -\dfrac{\eta SV}{e}\vec{e}_x.}$

3 – Schéma :



Référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Bilan des forces :

- Le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\sin\alpha\vec{e}_x - \cos\alpha\vec{e}_y)$.
- La réaction exercée par le fluide sur le solide : $\vec{R} = R\vec{e}_y$.
- La force de frottement $\vec{F} = -\dfrac{\eta SV}{e}\vec{e}_x$.

Principe fondamental de la dynamique :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = mg(\sin\alpha\vec{e}_x - \cos\alpha\vec{e}_y) + R\vec{e}_y - \frac{\eta SV}{e}\vec{e}_x.$$

On a $\vec{V} = V(t)\vec{e}_x$.

On projette sur $\vec{e}_x$:

$$m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = mg\sin\alpha - \frac{\eta SV}{e}.$$

Une fois la vitesse limite atteinte, la vitesse ne varie plus : $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0$. On a donc $mg\sin\alpha - \dfrac{\eta SV}{e} = 0$, de quoi on déduit l'expression

$$\boxed{V = V_{\text{lim}} = \frac{emg\sin\alpha}{\eta S}.}$$

A.N. : $\boxed{V_{\text{lim}} = 1.7\,\text{m/s}.}$

VIII Lecture d'un diagramme de Moody [• • ○]

1 – On lit $\lambda \simeq 0.022$, ce qui est en accord avec la formule de Blasius qui prédit $\lambda = 0.021$.

2 – On lit $\lambda \simeq 0.007$, ce qui est en désaccord avec la formule de Blasius qui prédit $\lambda = 0.0043$. Il fallait s'y attendre, puisqu'elle n'est plus valide pour $R_e \geq 10^5$. Il faut alors utiliser le diagramme.

3 – On lit $\lambda \simeq 0.049$.

IX Perte de charge dans l'alimentation en eau d'un immeuble [• • ○]

1 – Le fluide étant incompressible, le débit volumique D_v donnée dans l'énoncé est le même sur toute section du circuit.

On a $\boxed{v_1 = \dfrac{D_v}{\pi(d_1/2)^2}}$, d'où $v_1 = 0.7276\,\text{m/s}$, soit $\boxed{v_1 = 0.73\,\text{m/s}}$.

On a $\boxed{v_2 = \dfrac{D_v}{\pi(d_2/2)^2}}$, d'où $v_2 = 3.4815\,\text{m/s}$, soit $\boxed{v_2 = 3.5\,\text{m/s}}$.

2 – On a $R_{e1} = \dfrac{\rho v_1 d_1}{\eta} = 2.55 \times 10^4$, soit $\boxed{R_{e1} = 2.6 \times 10^4}$.

On a $R_{e2} = \dfrac{\rho v_2 d_2}{\eta} = 5.57 \times 10^4$, soit $\boxed{R_{e2} = 5.6 \times 10^4}$.

On peut donc appliquer la formule de Blasius dans les deux cas.

3 – $\boxed{\Delta p_{\text{reg1}} = \dfrac{1}{2}\rho v_1^2 \times 0.316\, R_{e1}^{-0.25}\, \dfrac{L_1}{d_1} = 2.8 \times 10^3\,\text{Pa} = 0.028\,\text{bar}}$,

$\boxed{\Delta p_{\text{reg2}} = \dfrac{1}{2}\rho v_2^2 \times 0.316\, R_{e2}^{-0.25}\, \dfrac{L_2}{d_2} = 7.8 \times 10^4\,\text{Pa} = 0.78\,\text{bar}}$,

$\boxed{\Delta p_{\text{sing}} = 10 \times \dfrac{1}{2}\rho v_2^2\, K = 0.91\,\text{bar}}$.

On a donc $\boxed{\Delta p_{c,\text{tot}} = 1.7\,\text{bar}}$.

On remarque que ce n'est pas négligeable, et que c'est la section dans le tuyau de diamètre petit qui contribue largement le plus (à la fois par les pertes régulières et singulières).

4 – On suppose l'écoulement incompressible et permanent, et on applique la relation de Bernoulli avec perte de charge entre les points A et C :

$$\frac{p_C}{\rho} + \frac{1}{2}v_C^2 + gz_C = \frac{p_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + gz_A - \frac{1}{\rho}\,\Delta p_{c,\text{tot}}$$

$$p_C = p_A + \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_C^2) + \rho g(z_A - z_C) - \Delta p_{c,\text{tot}}$$

$$\boxed{p_C = p_A - \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) - \rho g h - \Delta p_{c,\text{tot}} = p_A - 2.9\,\text{bar}.}$$

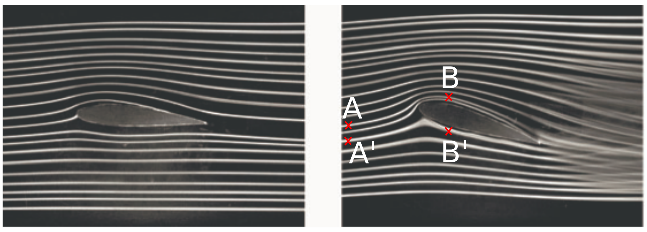
Pour avoir une pression en haut (donc au point C) de $5\,\text{bar}$, il faut donc imposer en A une pression $p_A = 5 + 2.9 = 7.9\,\text{bar}$.

X Interprétation de la portance d'une aile d'avion [• • ○]

1 - L'écoulement d'air est supposé incompressible. On a donc la propriété suivante : plus les lignes de courant sont resserrées, plus la vitesse est importante.

On voit ici (surtout sur la deuxième image), que les lignes de courant sont plus resserrées sur l'extrados que sur l'intrados. L'écoulement est donc plus rapide sur l'extrados que sur l'intrados.

2 - Écoulement stationnaire, incompressible, d'un fluide parfait : on peut utiliser la relation de Bernoulli le long d'une ligne de courant.



On utilise aussi le fait que les points A et A' sont proches et situés dans la zone non perturbée de l'écoulement, donc la vitesse et la pression y sont égales (on les note v_0 et p_0).

Sur l'extrados, entre A et B :

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_0^2 + gz_A = \frac{p_B}{\rho} + \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B \tag{1}$$

Sur l'intrados, entre A' et B' :

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_0^2 + gz_{A'} = \frac{p_{B'}}{\rho} + \frac{1}{2}v_{B'}^2 + gz_{B'} \tag{2}$$

3 - On soustrait les deux relations précédentes :

$$\frac{p_B - p_{B'}}{\rho} + \frac{1}{2}(v_B^2 - v_{B'}^2) + g(z_B - z_{B'}) = g(z_A - z_{A'}), \tag{3}$$

d'où

$$p_{B'} - p_B = \underbrace{\frac{\rho}{2}(v_B^2 - v_{B'}^2)}_{>0} + \underbrace{\rho g(z_B - z_{B'})}_{>0} + \underbrace{\rho g(z_{A'} - z_A)}_{\simeq 0}. \tag{4}$$

On a $(z_{A'} - z_A) \simeq 0$ car on peut prendre les lignes de courant aussi proche que l'on veut.

L'énoncé demande également de justifier que $\rho g(z_{B'} - z_B)$ est négligeable devant les autres termes. Ce n'est pas vraiment possible de le faire sans plus d'informations sur les vitesses et les pressions...

On voit de toute façon que $\boxed{p_{B'} - p_B > 0}$. La pression étant plus forte en B' sous l'aile que sur l'aile en B, la résultante des forces de pression sur l'aile est dirigée vers le haut.

XI Vidange d'une baignoire [•••]

Résolution de problème

1 – On pose le problème

On fait un schéma et des hypothèses simplificatrices : on suppose que la baignoire est un parallélépipède de base S et de hauteur h. Son volume est $V = Sh$.
On note S_B la surface de la bonde.
On supposera l'eau incompressible, en écoulement parfait, et que le régime est suffisamment stationnaire pour pouvoir appliquer la relation de Bernoulli.
Que se passe-t-il physiquement ? Le temps de vidage est plus long que le temps de remplissage, on a donc envie de dire que si on part d'une baignoire vide et qu'on ouvre robinet et bonde, la baignoire va déborder. Mais ce raisonnement suppose que les débits de remplissage et de vidage sont constants. C'est bien le cas pour le débit du robinet D_{v1}, mais pas pour le débit de vidage : celui-ci est d'autant plus important qu'il y a une hauteur d'eau importante. Il est donc possible qu'on atteigne un régime stationnaire où $D_{v1} = D_{v2}$ avant que l'eau ne déborde.

2 – On cherche une stratégie de résolution

On part de la baignoire vide, et on ouvre le robinet et la bonde. On sait que D_{v1} est constant, mais pas D_{v2}. Il va donc falloir l'exprimer.
On se souvient ici de l'exercice sur la vidange du réservoir d'eau : la situation était tout à fait similaire. On avait alors écrit la relation de Bernoulli entre un point A à la surface, et un point B situé au niveau de l'ouverture en bas :

$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + gz_A = \frac{p_B}{\rho} + \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B.$$

On avait ensuite négligé v_A devant v_B, fixé l'origine pour que $z_B = 0$, et pris $p_A = p_0$ (surface à l'air libre) et $p_B = p_0$ (jet à l'air libre). On a alors la relation

$$\boxed{v_B = \sqrt{2gz_A}.}$$

Le débit de sortie de la baignoire est donc

$$\boxed{D_{v2}(z_A) = v_B \times S_B = S_B\sqrt{2gz_A}.}$$

Comme D_{v2} augmente avec z_A, il arrive un moment où on atteint un régime d'équilibre avec $D_{v1} = D_{v2}(z_{A,eq})$. La baignoire ne déborde pas si $z_{A,eq} \leq h$.
Il faut maintenant exprimer $z_{A,eq}$ à l'aide des données de l'énoncé.

On raisonne sur les deux situations suivantes :

- Robinet ouvert et bonde fermée. La baignoire est initialement vide. Le débit volumique du robinet est constant égal à D_{v1}. L'énoncé indique que

  $$\boxed{D_{v1} \times t_1 = V = Sh}$$

  car la baignoire se remplit en $t_1 = 8\,\text{min}$. Ceci fournit une première relation.

- Robinet fermé et bonde ouverte. La baignoire est initialement remplie. Elle se vide en un temps $t_2 = 12\,\text{min}$. Il faut donc trouver l'expression de ce temps t_2 en fonction de des paramètre du problème, ce qui donnera une seconde relation.

  On reprend exactement la démonstration de l'exercice IV (vidange d'un réservoir), qui indique que

  $$\boxed{t_2 = \frac{S}{S_B}\sqrt{\frac{2h}{g}}.}$$

3 – On met en œuvre la stratégie

On est maintenant en mesure de conclure : bonde et robinet ouverts, on a à l'équilibre

$$\begin{aligned}
& D_{v1} = D_{v2}(z_{A,eq}) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{Sh}{t_1} = S_B \times \sqrt{2gz_{A,eq}} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{Sh}{t_1} = \frac{S}{t_2}\sqrt{\frac{2h}{g}} \times \sqrt{2gz_{A,eq}} \\
\Leftrightarrow \quad & \boxed{z_{A,eq} = h \times \frac{t_2^2}{4t_1^2} < h \quad \text{car } t_2 < 2t_1.}
\end{aligned}$$

Ceci montre que la baignoire ne déborde pas.

Remarque : On trouve toujours une solution pour $z_{\text{éq}}$, ce qui signifie qu'un régime stationnaire est toujours atteint (si la hauteur de la baignoire le permet). C'est normal, car le débit du robinet est fixé, alors que le débit de la bonde augmente avec la hauteur d'eau, et finit forcément par rattraper le débit du robinet.