Partie II : Thermodynamique et mécanique des fluides
Chapitre 3

TD – Fluide en écoulement stationnaire laminaire : viscosité et relation de Bernoulli

Remarque : exercice avec ⋆ : exercice particulièrement important, à maîtriser en priorité (de même que les exemples de questions de cours des “ce qu'il faut savoir faire”) | [• ∘ ∘] : difficulté des exercices

I Vrai-faux/questions courtes ⋆ | [• ∘ ∘]

1 - Quelle est l'unité de la viscosité dynamique η dans le système SI ?

2 - (V/F) Le théorème de Bernoulli ne s'applique jamais à un écoulement d'air car il est toujours compressible.

3 - Rappeler le théorème de Bernoulli et ses conditions d'application.

4 - Quelle est l'unité du travail indiqué, de la puissance indiqué, et quelle est la relation qui lie les deux ?

5 - (V/F) La perte de charge est toujours positive.

II Différentes expressions pour la relation de Bernoulli ⋆ | [• ∘ ∘]

On note la perte de charge soir Δp_c (homogène à des pascals), soit Δz_c (homogène à des mètres). On note w_i le travail massique indiqué. Parmi les relations suivantes, indiquer lesquelles sont correctes et lesquelles sont fausses. Pour celles qui sont correctes, indiquer ce à quoi elles sont homogènes.

1 - $\dfrac{p_s}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_s^2+gz_s=\dfrac{p_e}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_e^2+gz_e$

2 - $p_s+\dfrac{1}{2}\rho v_s^2+gz_s=p_e+\dfrac{1}{2}\rho v_e^2+gz_e$

3 - $\dfrac{p_s}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_s^2+gz_s=\dfrac{p_e}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_e^2+gz_e-\Delta p_c$

4 - $\dfrac{p_s}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_s^2+gz_s=\dfrac{p_e}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_e^2+gz_e-g\Delta z_c$

5 - $\dfrac{p_s}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_s^2+gz_s=\dfrac{p_e}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_e^2+gz_e-\dfrac{\Delta p_c}{\rho}$

6 - $\dfrac{p_s}{\rho g}+\dfrac{1}{2g}v_s^2+z_s=\dfrac{p_e}{\rho g}+\dfrac{1}{2g}v_e^2+z_e-\Delta z_c$

7 - $\dfrac{p_s}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_s^2+gz_s=\dfrac{p_e}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_e^2+gz_e+\Delta p_c$

8 - $p_s+\dfrac{1}{2}\rho v_s^2+\rho gz_s=p_e+\dfrac{1}{2}\rho v_e^2+\rho gz_e+w_i$

9 - $\dfrac{p_s}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_s^2+gz_s=\dfrac{p_e}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_e^2+gz_e-w_i$

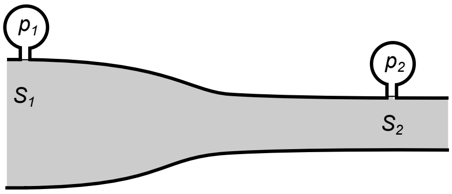
10 - $\dfrac{p_s}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_s^2+gz_s=\dfrac{p_e}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_e^2+gz_e+w_i$

11 - $p_s+\dfrac{1}{2}\rho v_s^2+\rho gz_s=p_e+\dfrac{1}{2}\rho v_e^2+\rho gz_e+\rho w_i$

12 - $p_s+\dfrac{1}{2}\rho v_s^2+\rho gz_s=p_e+\dfrac{1}{2}\rho v_e^2+\rho gz_e+\rho w_i-\rho g\Delta z_c$

III Mesure de vitesse d'écoulement par différence de pression ⋆ | [● ○ ○]

Un écoulement dans une conduite cylindrique horizontale présente un rétrécissement de section comme sur le schéma ci-contre. Des manomètres permettent de mesurer la pression relative en 1 et en 2.
On suppose le fluide parfait et incompressible, et le régime permanent atteint.

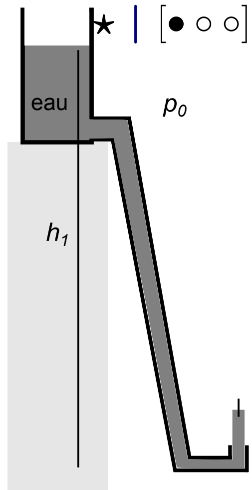


1 – Écrire la relation de conservation du débit volumique entre la section 1 et la section 2.
Pourquoi a-t-on conservation de ce débit ?

2 – Donner l'expression de la vitesse v_1 en fonction de $p_1 - p_2$, ρ, et S_1/S_2.

IV Hauteur atteinte par un jet d'eau ⋆ | [● ○ ○]

On fabrique une fontaine avec le dispositif présenté ci-contre. On a $h_1 = 10\,\text{m}$.



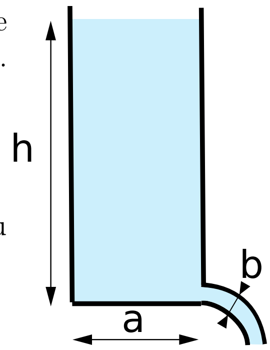
1 - Quelle est la hauteur atteinte par le jet d'eau ?

2 - On voudrait que ce jet d'eau atteigne une hauteur de 50 m, avec un débit de 100 L/h. On ajoute pour cela une pompe. Quelle doit être la puissance fournie par la pompe au fluide ?

3 - On reprend le cas de la question 1. Donner l'expression de la vitesse dans le jet en fonction de la hauteur z. On prendra $p = p_0$ dans le jet.

V Vidange d'un réservoir [● ● ○]

On considère le réservoir d'eau cylindrique ci-contre. La pression au niveau de la surface est p_0. La pression dans le jet en sortie est également égale à p_0.



1 – Donner la relation entre la vitesse du fluide au point A situé à la surface de l'eau, la vitesse au point B situé dans le jet en sortie, et les diamètres a et b.

2 – Exprimer la vitesse du jet en sortie en fonction h et g.
Faire l'application numérique pour $h = 1\,\text{m}$.

3 – On veut maintenant trouver l'évolution de la hauteur d'eau en fonction du temps.

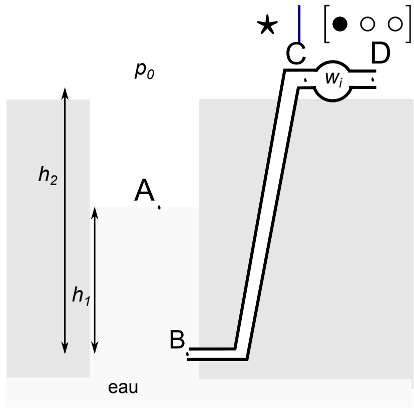
a – Donner la relation entre la vitesse en A et la hauteur h.

b – En déduire une équation différentielle portant sur la hauteur $h(t)$.

c – On note h_0 la hauteur à $t = 0$. Donner l'expression de $h(t)$.
En déduire le temps nécessaire au vidage complet du réservoir.
Application numérique pour une hauteur de 1.0 m, des diamètres $a = 20\,\text{cm}$ et $b = 1.0\,\text{cm}$, et $g = 9.8\,\text{m/s}^2$.

VI Bilan de puissance sur une installation

★ | [● ○ ○]



On considère un dispositif de captage d'eau qui puise de l'eau dans une nappe phréatique. Le point A sera supposé immobile. On prendra $p_0 = 1.0\,\text{bar}$, $h_1 = 2.0\,\text{m}$, $h_2 = 6.0\,\text{m}$. La pression requise en D à la sortie de la pompe est $p_D = 4.0\,\text{bar}$. Le diamètre de la canalisation est $d = 50\,\text{mm}$. On se place en régime stationnaire, et le débit volumique retenu est $D_v = 6.0\,\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$.

1 – On effectue d'abord une étude idéalisée, sans aucune perte.

- **a –** Rappeler quelles hypothèses permettent d'utiliser la relation de Bernoulli.
- **b –** En utilisant la relation de Bernoulli, donner l'expression puis la valeur du travail massique que doit fournir la pompe.
- **c –** En déduire la puissance nécessaire pour la pompe.

2 – On prend maintenant en compte les pertes de charge dans l'installation. On donne la relation pour la perte de charge régulière dans une conduite de diamètre d et longueur l : $\Delta z_c = \dfrac{0.316}{R_e^{1/4}} \dfrac{v^2}{2g} \dfrac{l}{d}$ (valable pour $2.5 \times 10^3 \leq R_e \leq 10^5$).

- **a –** Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement considéré ici.
- **b –** Calculer la perte de charge Δz_c.
- **c –** Modifier le bilan de puissance effectué à la question 1.b pour prendre en compte ces pertes, et donner la puissance que doit fournir la pompe.
- **d –** Le rendement électrique de la pompe est $\eta_{\text{pompe}} = 0.7$. En déduire la puissance électrique consommée par la pompe.

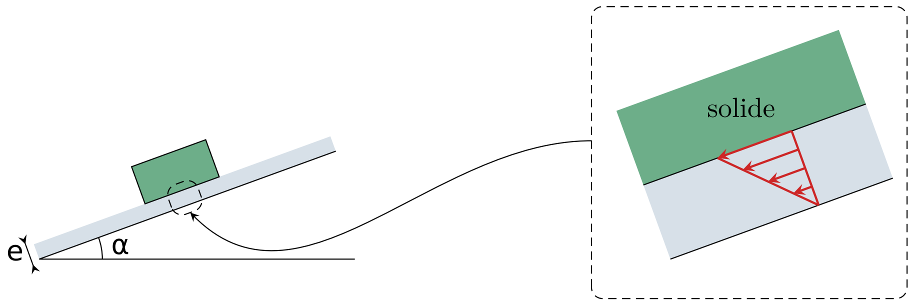
VII Solide glissant sur un plan incliné et lubrifié

[● ● ○]

Oral banque PT

On étudie un solide qui glisse sur un plan incliné. Il y a présence d'une fine couche de lubrifiant entre le solide et le plan. On note e son épaisseur, et η la viscosité du fluide lubrifiant employé. Par ailleurs, on note m la masse du solide, S la surface de contact entre le solide et le fluide, et α l'angle entre le plan et l'horizontale.

L'objectif est d'arriver à exprimer la force de frottement et la vitesse limite du solide.



1 – Première étape : schématiser. Placer sur le schéma un système de coordonnées adaptées au problème.

Donner ensuite l'expression du champ des vitesses $\vec{v}$ dans la couche de fluide, en notant V la vitesse du solide et en supposant que la norme de la vitesse augmente linéairement entre le plan et le solide.

2 – En déduire l'expression de la force de frottement subie par le solide, en fonction de η, V, S et e.

3 – En déduire l'expression de la vitesse limite atteinte par le solide.

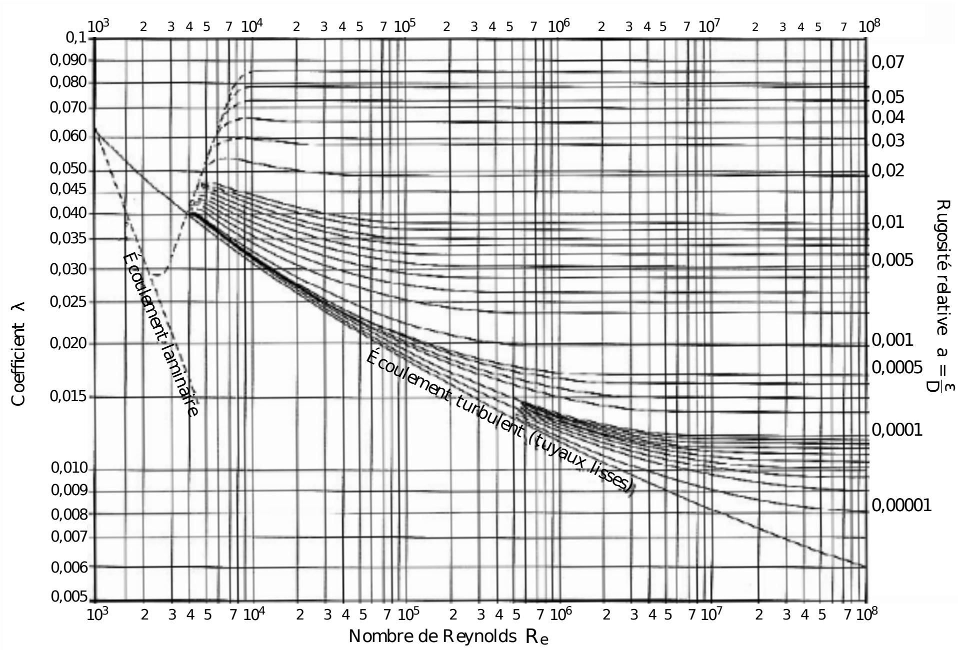
Faire l'application numérique pour un solide de masse 500 g dont la base est un carré de coté 10 cm, avec un lubrifiant de viscosité 0.1 Pl, et un angle de 20 degrés.

VIII Lecture d'un diagramme de Moody [● ● ○]

Le diagramme de Moody donne le coefficient λ de perte de charge régulière pour un écoulement dans une conduite. Il est construit à partir d'analyses théoriques et de mesures expérimentales.
Ce coefficient permet ensuite de calculer la perte de charge : $\Delta p_c = \frac{1}{2}\rho v_0^2 \lambda \frac{L}{D}$, avec D le diamètre de la conduite, L sa longueur, ρ la masse volumique de l'écoulement et v_0 sa vitesse.
Le coefficient λ dépend de deux facteurs :

- le nombre de Reynolds de l'écoulement, $R_e = \frac{\rho v_0 D}{\eta}$, où η est la viscosité dynamique du fluide ;
- et de la rugosité relative de la conduite, définie comme $a = \epsilon/D$ (ϵ est la taille caractéristique des irrégularités de la paroi).

La droite "écoulement laminaire" correspond à la formule $\lambda = \frac{64}{R_e}$ valide pour un écoulement laminaire (donc pour $R_e \leq 2000$ environ).
La courbe "écoulement turbulent (tuyau lisse)" correspond, pour $R_e \leq 10^5$, à la formule de Blasius $\lambda = 0.316 R_e^{-0.25}$.



1 – Pour un tuyau lisse avec $R_e = 5 \times 10^4$, vérifier que le diagramme est bien en accord avec la formule de Blasius (qui donne $\lambda = 0.316 R_e^{-0.25} = 0.021$).

2 – Et pour un tuyau lisse avec $R_e = 3 \times 10^7$? (la formule donne $\lambda = 0.316 R_e^{-0.25} = 0.0043$).

3 – Que vaut λ pour un tuyau de rugosité relative $a = 0.02$ à très grand nombre de Reynolds ?

IX Perte de charge dans l'alimentation en eau d'un immeuble [$\bullet\circ\circ$]

On considère l'alimentation en eau d'un immeuble de 4 étages. On veut savoir quelle doit être la pression de l'eau en bas de l'immeuble pour avoir une pression en haut de 5 bar.
L'installation est la suivante :

- Portion 1 : Du point A (bas de l'immeuble) au point B (entrée du logement), une longueur $L_1 = 15\,\text{m}$ de tuyau de diamètre $d_1 = 3.5\,\text{cm}$. Ce tuyau effectue une dénivellation totale de $h = 12\,\text{m}$.

  On néglige les pertes de charges singulières sur cette portion.

- Portion 2 : Du point B (entrée du logement) au point C (robinet de la cuisine), une longueur $L_1 = 10\,\text{m}$ de tuyau de diamètre $d_2 = 1.6\,\text{cm}$. Il est horizontal.

  Sur cette portion, on dénombre 10 coudes, qui provoquent chacun une perte de charge singulière.

Le débit nécessaire pour l'utilisateur est $D_v = 0.7\,\text{L/s}$. L'étude s'effectue en régime stationnaire.
Pour la perte de charge singulière provoquée par un coude d'angle $\pi/2$, on a la formule $\Delta p_{c,\text{coude}} = \frac{1}{2}\rho v_0^2 K$ avec $K = 1.5$.

Pour la perte de charge régulière on donne la formule de Blasius : $\Delta p_c = \frac{1}{2}\rho v_0^2\,\lambda\,L/d$, $\lambda = 0.316 R_e^{-0.25}$, qui est valable pour un écoulement turbulent dans une conduite lisse et pour $2500 \leq R_e \leq 10^5$.
On notera ρ et η la masse volumique et la viscosité de l'eau. On prendra $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1 – Exprimer la vitesse de l'écoulement dans la portion 1 et dans la portion 2. Faire l'application numérique.

2 – En déduire le nombre de Reynolds dans chacune des portions.

Peut-on effectivement appliquer la formule de Blasius ?

3 – Exprimer puis calculer la perte de charge singulière dans la portion 1 Δp_{sing1}, la perte de charge régulière Δp_{reg1} dans la section 1 et Δp_{reg2} dans la section 2.

Donner la valeur numérique de la perte de charge totale $\Delta p_{c,\text{tot}}$.

4 – Donner l'expression de la pression en C en fonction de celle en A.

Conclure sur la pression à imposer en A.

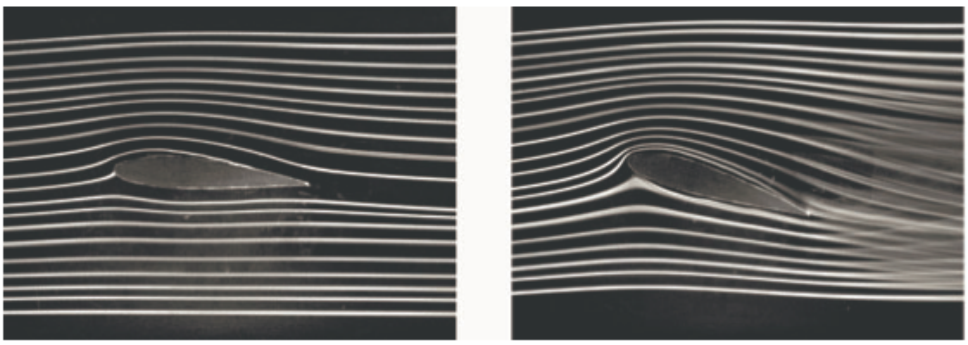
X Interprétation de la portance d'une aile d'avion [$\bullet\bullet\circ$]

D'après Centrale TSI 2015

L'élément essentiel au fonctionnement d'un avion en dehors du système de propulsion qui assure sa mise en mouvement dans l'air sont les ailes dont le profil particulier permet d'assurer la sustentation dans l'air.

L'écoulement de l'air autour du profil d'une aile d'avion est représenté sur la figure ci-dessous. Il permet de visualiser l'allure des lignes de courant lors d'un écoulement à faible incidence et à forte incidence.

L'air est supposé incompressible, de masse volumique ρ. On admettra que les lois générales de la mécanique des fluides, en particulier la relation de Bernoulli, établies dans le cadre des écoulements laminaires stationnaires dans une conduite, sont applicables à l'étude de l'écoulement de l'air autour du profil d'une aile d'avion.



Lignes de courant autour du profil d'une aile d'avion obtenue en soufflerie
(D'après H. Babinsky "How do wings work", Physics Education,38(6),497, 2003).

1 – En exploitant la figure, comparer qualitativement le module v de la vitesse du fluide aux points situés au voisinage de l'intrados (qui est la face de l'aile vers le sol) et de l'extrados (la face supérieure de l'aile). On raisonnera sur la figure de droite, où le phénomène est plus important.

2 – Écrire la relation de Bernoulli le long d'une ligne de courant sur l'extrados. Faire de même le long d'une ligne de courant sur l'intrados.

3 – Après avoir justifié que les effets de la pesanteur peuvent être négligés, déduire des relations établies précédemment que l'écoulement de l'air entraîne l'existence de forces aérodynamiques qui permettent d'expliquer la sustentation de l'aile d'avion.

XI Vidange d'une baignoire [• • •]

Résolution de problème

Une baignoire se remplit en 8 minutes (robinet ouvert et bonde fermée), et se vide en 12 minutes (robinet fermé et bonde ouverte).
La baignoire déborde-t-elle si on ouvre à la fois le robinet et la bonde ?

Remarque : Le problème énoncé est volontairement imprécis, il s'agit d'une question qui n'est pas formulée directement dans le langage physique. Il faut donc modéliser le problème, faire des hypothèses, aller chercher les valeurs numériques des grandeurs pertinentes dans le cours ou sur Internet (ou demander à l'examinateur si c'est un oral).
La démarche de résolution générale d'un tel problème reprend celle déjà exposée sur les grilles d'évaluation de colle :

- On "pose le problème" : schéma du problème, on identifie les grandeurs pertinentes et on leur donne un symbole, on estime leurs valeurs numériques. En thermodynamique, on peut commencer par identifier la transformation et ce que l'on connaît/cherche dans les états initial et final.
- On cherche une stratégie pour résoudre le problème : écrire les relations connues entre les grandeurs, faire des hypothèses.
- On met en œuvre la stratégie : on se lance dans les calculs, on fait les applications numériques.
- On a un regard critique sur les résultats obtenus : formules homogènes, valeurs numériques réalistes. On commente le résultat.

Indices : le débit volumique D_{v1} du robinet est constant, mais pas le débit volumique D_{v2} de la bonde, car il dépend de la hauteur d'eau (exactement comme dans l'exercice IV).
On traite d'abord le cas avec robinet ouvert et bonde fermée. Ceci donne une relation entre le temps $t_1 = 8\,\mathrm{min}$ et d'autres paramètres. On fait de même avec le cas robinet fermé et bonde ouverte pour avoir une relation entre $t_2 = 12\,\mathrm{min}$ et d'autres paramètres.
Enfin, on traite le cas robinet et bonde ouverte en supposant le régime stationnaire atteint à une certaine hauteur z_{eq}, et on voit ce que l'on peut dire sur z_{eq}.