

Correction – TD – Statique des fluides

I Vrai-faux/questions courtes

★ | [●○○]

- 1 - Si on note h la hauteur entre la surface à l'air libre et le point considéré, et p_0 la pression à l'air libre, on a $p(h) = p_0 + \rho gh$. Qui ne dépend donc que de la profondeur h .
On a donc $p_A = p_B = p_C = p_D$.
- 2 - (V/F) Vrai.
- 3 - (V/F) Faux. Contre-exemple : un ballon immergé dans l'eau constitue une surface fermée. Et pourtant la résultante des forces de pression qui s'exerce sur lui n'est pas nulle. Elle est d'ailleurs donnée par la formule d'Archimède $\vec{\Pi} = \iint_S p(M) dS \vec{n} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{ballon immergé}} \vec{g}$.
- 4 - (V/F) Faux, elle est continue.
- 5 - (V/F) Faux, de 10 bars tous les 10 mètres.
- 6 - (V/F) Faux. Une particule de fluide est un volume mésoscopique fermé de fluide. Il contient donc un grand nombre de molécules ou atomes du fluide.
- 7 - ρg est en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$.
La pression est en pascal, donc en $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$. Or on a la formule poids = mg , donc $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, et donc $\text{Pa} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.
Et finalement, dp/dz est en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$.
- 8 - 1 bar = 10^5 Pa, 1 atm = 1.013 bar, 1 Pa = 1 N/m^2 .

IV Barrage

- 1 - Pour aboutir à cette expression il faut supposer le fluide immobile, incompressible (ρ est alors uniforme), la pesanteur uniforme, et il faut que l'axe z soit orienté vers le bas.
- 2 - Voir la démonstration effectuée en cours (et la méthode sur le poly de début de chapitre). On trouve :

$$\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} = \left(p_0 H L + \rho_0 g L \frac{H^2}{2} \right) \vec{u}_x.$$

- 3 - La pression dans l'air est supposée uniforme et égale à p_0 .
La force exercée par l'air sur la surface du barrage est donc égale à la pression multipliée par la surface, et elle est dirigée depuis l'air vers le barrage :

$$\vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{barrage}} = -p_0 H L \vec{u}_x.$$

- 4 - La force totale est la somme des deux précédentes, on trouve donc :

$$\vec{F}_{\text{total} \rightarrow \text{barrage}} = \rho_0 g L \frac{H^2}{2} \vec{u}_x.$$

On trouve une intensité de 4.1×10^{10} N. (On garde deux chiffres significatifs car on en a seulement deux pour $\rho_0 = 1.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.)

Remarque : ceci correspondrait à une masse de $4.1 \times 10^{10} / 9.81 = 4.2 \times 10^9$ kg.

VI Cube posé au fond d'un récipient

[●○○]

1. Il faut que $\rho_c > \rho_e$ (ρ_e masse volumique de l'eau).
2. Hypothèses : fluide immobile, objet non en contact avec les parois. Le théorème indique que la résultante des forces de pression s'exerçant sur un objet immergé est égale à l'opposée du poids du fluide déplacé, donc à $-\rho_{\text{fluide}} V_{\text{objet}} \vec{g}$.

On ne peut pas l'appliquer ici car l'objet touche le fond du récipient.

3. Résultante des forces de pression :
 - S'exerçant sur les faces latérales : les forces correspondantes se compensent et la résultante est nulle.
 - S'exerçant sur la face supérieure : la résultante est $[p_0 + \rho_e g(H - h)] \times h^2$ dirigée vers le bas.

En notant \vec{e}_z un vecteur unitaire vers le haut, la résultante est donc

$$\vec{R} = -[p_0 + \rho_e g(H - h)] \times h^2 \vec{e}_z.$$

4. a. S'il y a de l'eau sous le cube, alors il y a également une résultante des forces de pression qui s'exercent sous le cube est qui est $+ [p_0 + \rho_e gH] \times h^2 \vec{e}_z$.

La résultante totale est donc $\vec{R} = [p_0 + \rho_e gH] \times h^2 \vec{e}_z - [p_0 + \rho_e g(H - h)] \times h^2 \vec{e}_z$, soit $\vec{R} = -\rho_e g h^3 \vec{e}_z$.

- b. En appliquant directement la formule d'Archimède on obtient exactement pareil (h^3 est le volume du cube). Et on peut effectivement l'appliquer dans ce cas là car il y a de l'eau sous le cube, donc il n'est pas en contact avec les parois.

VII Barrage incliné

[●●○]

- 1 - Avec \vec{e}_z vers le bas et \vec{e}_y vers la droite sur le schéma de l'énoncé, le vecteur normal à la face inclinée (et dirigé de l'air vers le barrage) est $\vec{n} = \cos \alpha \vec{e}_z - \sin \alpha \vec{e}_y$.

Notons $d = \sqrt{e^2 + H^2}$ la longueur de la face inclinée.

On a $\cos \alpha = e/d$ et $\sin \alpha = H/d$.

La résultante des forces de pression exercées par l'air sur le barrage est

$$\begin{aligned}\vec{F} &= p_0 L d \vec{n} \\ &= p_0 L d (\cos \alpha \vec{e}_z - \sin \alpha \vec{e}_y) \\ &= p_0 L d \left(\frac{e}{d} \vec{e}_z - \frac{H}{d} \vec{e}_y \right) \\ &= p_0 L e \vec{e}_z - p_0 L H \vec{e}_y.\end{aligned}$$

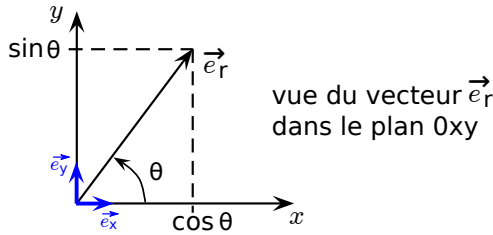
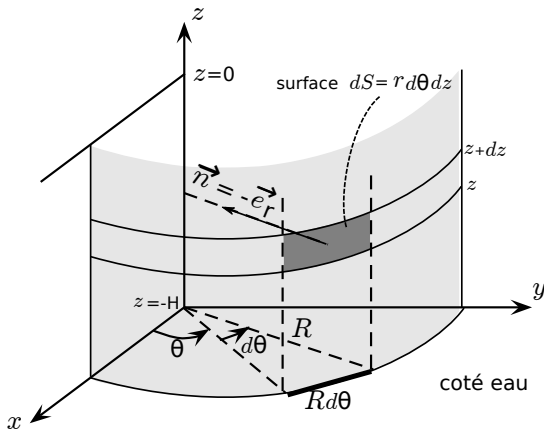
VIII Barrage incurvé

Remarque : l'exercice IV est à savoir faire absolument, alors que celui-ci est moins important.

- 1 - La longueur d'un arc de cercle de rayon R et d'angle d'ouverture α est : $L = \alpha R$.

(Un cas particulier bien connu est pour $\alpha = 2\pi$, puisqu'on a alors un cercle complet, dont le périmètre est bien $2\pi R$.)

L'application numérique donne $L = 990$ m.



- 2 - a - On a $\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$ (voir schéma ci-dessous).
- b - Le vecteur normal au point M est donc $\vec{n} = \vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$.
- c - On applique la méthode générale.

- Choix du système de coordonnées : on prend ici des coordonnées cylindriques pour s'adapter à la forme du barrage.
- De quelles variables dépend p : d'aucune, car $p = p_0$ pour l'air. Et pour \vec{n} : de θ .
- On construit une petite surface dS où p et \vec{n} sont constants : on considère une surface comme sur le dessin ci-contre.
- L'aire de la surface est

$$dS = dz \times R d\theta = R d\theta dz.$$

La normale à la surface est

$$\vec{n} = \vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$$

- La force pressante exercée par l'air sur cette petite surface est donc

$$d\vec{F} = p_0 dS \vec{n}.$$

- La force totale exercée par l'air sur le barrage est donc :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{barrage}} &= \int_{z=-H}^0 \int_{\theta=0}^{\alpha} p_0 dS \vec{n} \\ &= \int_{z=-H}^0 \int_{\theta=0}^{\alpha} p_0 R d\theta dz (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) \\ &= R \int_{z=-H}^0 \int_{\theta=0}^{\alpha} p_0 d\theta dz (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) \\ &= R \int_{z=-H}^0 \left[\int_{\theta=0}^{\alpha} (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) d\theta \right] p_0 dz \\ &= R \int_{z=-H}^0 [(\sin \alpha - \sin 0) \vec{e}_x + (-\cos \alpha + \cos 0) \vec{e}_y] p_0 dz \\ &= R [\sin \alpha \vec{e}_x + (1 - \cos \alpha) \vec{e}_y] \int_{z=-H}^0 p_0 dz \\ &= R (\sin \alpha \vec{e}_x + (1 - \cos \alpha) \vec{e}_y) p_0 H \end{aligned}$$

Si on prend $\alpha = \pi$, on trouve :

$$\boxed{\vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{barrage}} = 2p_0 R H \vec{e}_y.}$$

Remarque importante : On voit donc que même si p_0 est uniforme, on ne peut pas dire que la force totale est $p_0 \times \text{surface}$, car le vecteur normal \vec{n} n'est pas constant sur la surface. On n'obtient donc pas $\vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{barrage}} = p_0 \times \pi R H \vec{e}_y$, et il faut faire le calcul avec l'intégrale comme ci-dessus.

Remarque : Le résultat s'écrit aussi $2RH p_0 \vec{e}_y$, c'est-à-dire que tout se passe comme si la pression s'exerçait sur une surface de hauteur H et de largeur $2R$. C'est aussi valable pour l'expression de $\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}}$.

- 3 - Même démarche que précédemment, sauf qu'ici $p(z) = p_0 - \rho_0 g z$, et la normale est $\vec{n} = -\vec{e}_r$.

La force totale exercée par l'eau sur le barrage est donc :

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} &= \int_{z=-H}^0 \int_{\theta=0}^{\alpha} p(z) \, dS \, \vec{n} \\
 &= - \int_{z=-H}^0 \int_{\theta=0}^{\alpha} (p_0 - \rho_0 g z) R d\theta dz (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) \\
 &= -R \int_{z=-H}^0 \int_{\theta=0}^{\alpha} (p_0 - \rho_0 g z) d\theta dz (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) \\
 &= -R \int_{z=-H}^0 \left[\int_{\theta=0}^{\alpha} (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) d\theta \right] (p_0 - \rho_0 g z) dz \\
 &= -R \int_{z=-H}^0 [(\sin \alpha - \sin 0) \vec{e}_x + (-\cos \alpha + \cos 0) \vec{e}_y] (p_0 - \rho_0 g z) dz \\
 &= -R [\sin \alpha \vec{e}_x + (1 - \cos \alpha) \vec{e}_y] \int_{z=-H}^0 (p_0 - \rho_0 g z) dz \\
 &= -R (\sin \alpha \vec{e}_x + (1 - \cos \alpha) \vec{e}_y) \left(p_0 H + \rho_0 g \frac{H^2}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Si on prend $\alpha = \pi$, on trouve :

$$\boxed{\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} = -2R \left(p_0 H + \rho_0 g \frac{H^2}{2} \right) \vec{e}_y.}$$

4 - Finalement, la force totale exercée sur le barrage est la somme des deux forces précédentes :

$$\boxed{\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} = -2R \rho_0 g \frac{H^2}{2} \vec{e}_y.}$$

On trouve 4.1×10^{10} N.