Partie II : Thermodynamique et mécanique des fluides
Chapitre 1 – Statique des fluides

Correction – DM 4 – Modèles de l'atmosphère

1 - a - Voir la démonstration du cours. On aboutit à $p(z) = p_0 \exp(-z/H)$ avec $p_0 = 1.0\,\text{bar}$ et $\boxed{H = \dfrac{RT_0}{Mg} = 8.6\,\text{km}.}$

b - Pour $z = 1\,\text{km}$: $p = 0.89\,\text{bar}$. Pour $z = 10.0\,\text{km}$: $p = 0.31\,\text{bar}$.

Les valeurs mesurées à ces deux altitudes sont $0.899\,\text{bar}$ et 0.265.

L'accord est très bon pour $z = 1\,\text{km}$ (écart de 1%), mais nettement moins à $10\,\text{km}$ (écart de 17%).

c - On voit sur le graphique que la température n'est pas du tout uniforme dans la troposphère, mais qu'elle varie linéairement. L'hypothèse isotherme n'est donc pas valide.

On peut s'attendre à ce que cette hypothèse isotherme donne des résultats corrects pour des altitudes faibles où la température n'a pas encore trop varié, mais pas pour des altitudes élevées.

On constate par ailleurs que la pesanteur g varie très peu, ce qui ne remet pas en cause l'hypothèse $g = \text{cst}$.

2 - a - On prend $T_0 = 288\,\text{K}$.

On voit sur le graphique que la température est linéaire entre 0 et 10 km d'altitude. On peut donc estimer λ en divisant simplement l'accroissement des y (donc de T) par l'accroissement des x (donc de z) : $\lambda = \left|\dfrac{T(10\text{km}) - T(0\text{km})}{10\text{km} - 0\text{km}}\right| = 6.5 \times 10^{-3}\,\text{K/m}$ (on a pris les valeurs dans la table, ce qui est plus précis).

On a donc une décroissance de la température de 6.5°C tous les 1000 m.

(Pour λ il fallait faire attention au fait que vu la loi $T = T_0 - \lambda z$, λ est l'accroissement des T divisé par l'accroissement des z.)

b - On procède comme à la question 1, sauf que l'on remplace T_0 par l'expression pour $T(z)$:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho(z)\,g = -\left(\frac{p(z)\,M}{R\,T(z)}\right) g = -\left(\frac{p(z)\,M}{R\,(T_0 - \lambda z)}\right) g.$$

c - On prend l'expression fournie dans l'énoncé pour $p(z)$, c'est-à-dire $p(z) = p_0\left(1 - \dfrac{\lambda z}{T_0}\right)^{\alpha}$, et on calcule sa dérivée : $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \alpha \times \left(\dfrac{-\lambda}{T_0}\right) \times p_0 \left(1 - \dfrac{\lambda z}{T_0}\right)^{\alpha - 1}$.

On calcule également ce que vaut le membre de droite de l'équation (1) du sujet avec l'expression de $p(z)$ fournie : $-p(z)\dfrac{Mg}{R(T_0 - \lambda z)} = -p_0\left(1 - \dfrac{\lambda z}{T_0}\right)^{\alpha} \times \dfrac{Mg}{R(T_0 - \lambda z)} = -\dfrac{p_0 Mg}{RT_0}\left(1 - \dfrac{\lambda z}{T_0}\right)^{\alpha - 1}$.

On voit que pour que ces deux termes soient égaux, il faut avoir $\dfrac{p_0 Mg}{RT_0} = \alpha\dfrac{\lambda}{T_0}p_0$, et donc qu'il faut poser $\boxed{\alpha = \dfrac{Mg}{\lambda R}}$. L'application numérique donne $\boxed{\alpha = 5.26.}$

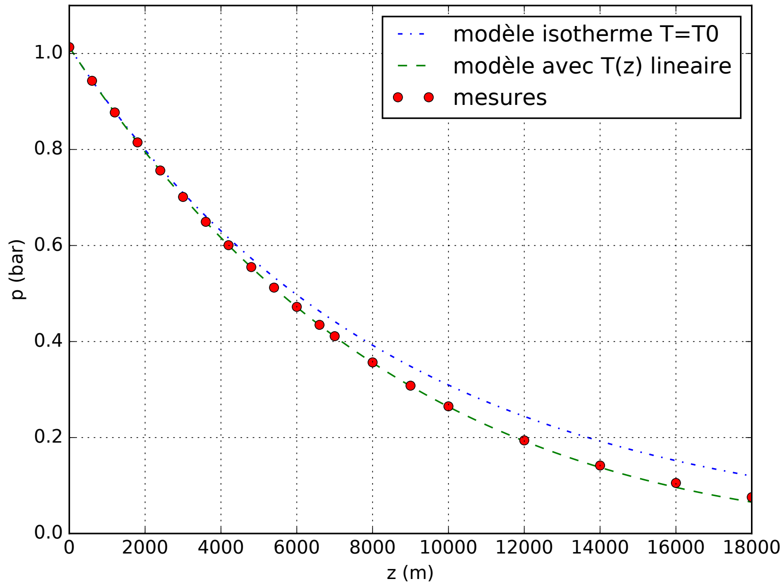
d - Pour $z = 1\,\text{km}$: $p = 0.89\,\text{bar}$, il n'y a donc pas de différence avec le modèle isotherme (la différence est noyée dans les chiffres significatifs). L'accord avec les mesures est très bon (1%).

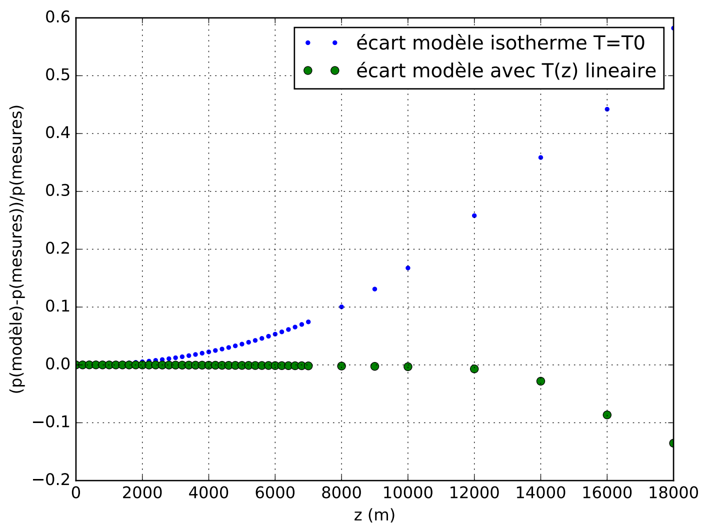
Pour $z = 10\,\text{km}$: $p = 0.26\,\text{bar}$, ce qui correspond aux mesures.

Conclusions :

- Ce modèle avec $T(z)$ linéaire est donc en bon accord avec les mesures au moins jusqu'à $z = 10\,\text{km}$.

- Quant au modèle isotherme (T constant), il est en bon accord avec les mesures jusqu'à $z = 1\,\mathrm{km}$ (et même 2 ou $3\,\mathrm{km}$, cf graphique ci-dessous), mais pas au dela. D'après le graphique ci-dessous, il faut l'utiliser pour $z \leq 3\,\mathrm{km}$ si on veut des erreurs inférieures à 5%.





3 - On part directement du deuxième point : on montre en effet facilement qu'on arrive à $\int_{p=p_0}^{p=p(z_1)} \frac{\mathrm{d}p}{p} = \int_0^{z_1} -\frac{Mg}{R}\frac{\mathrm{d}z}{T_0-\lambda z}$.

Le membre de droite vaut : $\displaystyle\int_{p=p_0}^{p=p(z_1)} \frac{\mathrm{d}p}{p} = \int_{p=p_0}^{p=p(z_1)} \mathrm{d}(\ln p) = \ln\frac{p(z_1)}{p_0}$.

Le membre de gauche vaut : $\displaystyle\int_0^{z_1} -\frac{Mg}{R}\frac{\mathrm{d}z}{T_0-\lambda z} = -\frac{Mg}{R}\int_0^{z_1}\frac{\mathrm{d}z}{T_0-\lambda z} = -\frac{Mg}{R}\left[-\frac{1}{\lambda}\ln(T_0-\lambda z)\right]_0^{z_1} = \frac{Mg}{\lambda R}\ln\left(\frac{T_0-\lambda z_1}{T_0}\right) = \ln\left(\frac{T_0-\lambda z_1}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{\lambda R}}$.

On a égalité des deux membres. On peut passer à l'exponentielle et donc enlever les ln. On obtient donc bien $\displaystyle\frac{p(z_1)}{p_0} = \left(\frac{T_0-\lambda z_1}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{\lambda R}}$, ce qui est ce qui était proposé dans l'énoncé.