Fiche méthode
Mathématiques

Fonctions de plusieurs variables et dérivées partielles

Dans cette fiche, tout ce qui est encadré est particulièrement important.

On considère une fonction de deux variables $f(x,y)$. (On peut facilement généraliser tout ce qui suit à 3 variables : $f(x,y,z)$, ou plus.)

Exemples : en thermodynamique on peut avoir l'énergie interne $U(T,p)$, ou en électromagnétisme le potentiel $V(x,y,z)$...

Dérivées partielles premières

f possède deux dérivées partielles premières :

- $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ signifie que l'on dérive $f(x,y)$ par rapport à x en considérant que y est une constante.
- $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_x$ signifie que l'on dérive $f(x,y)$ par rapport à y en considérant que x est une constante.

On trouve également les notations suivantes : $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_y = \left.\dfrac{\partial}{\partial x}\right|_y f$. On omet aussi souvent d'indiquer la variable qui est fixée (le y dans l'exemple précédent), car elle est sous-entendue.

Différentielle de f et lien avec une variation infinitésimale

Supposons que x varie de $\mathrm{d}x$ et que y varie de $\mathrm{d}y$. La fonction f varie alors d'une certaine quantité $\mathrm{d}f$:

$$f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) = f(x,y) + \mathrm{d}f,$$

avec

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y.$$

Remarque : Ceci généralise le cas d'une seule variable, qui est $f(x+\mathrm{d}x) = f(x) + \mathrm{d}f$ avec $\mathrm{d}f = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$.

Dérivées partielles secondes

Chacune des dérivées partielles premières est une fonction de deux variables, par exemple $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y (x,y)$.
On peut donc choisir de les dériver à nouveau, soit par rapport à x à y fixé, soit par rapport à y à x fixé.
Par exemple $\left.\dfrac{\partial}{\partial y}\right|_x \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y$, qui est plus simplement noté $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
On obtient ainsi quatre dérivées partielles secondes pour f :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.}$$

Le théorème de Schwarz indique que si f est de classe C^2 (ce qui sera toujours le cas en physique-chimie), alors les dérivées partielles croisées sont égales : $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}$.

Exercices pour s'entraîner

A - Calculer les dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y des fonctions suivantes :
1 - $f(x,y) = xy^2 + 2x$, **2 -** $f(x,y) = x/y$, **3 -** $f(t,x) = e^{-x/l}\cos(\omega t - kx)$.

B - Pour les cas 1 et 2, vérifier que le théorème de Schwarz est bien vérifié.

C - Pour les cas 1 et 2, calculer la différentielle de f.

Réponses :

A.1 - $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y = y^2 + 2$, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_x = 2xy$.

A.2 - $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 1/y$, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_x = -x/y^2$.

A.3 - $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_t = e^{-x/l}\left(-\frac{1}{l}\cos(\omega t - kx) + k\sin(\omega t - kx)\right)$, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_x = -\omega e^{-x/l}\sin(\omega t - kx)$.

B.1 - Pour vérifier le théorème de Schwarz dans le cas 1, on dérive $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y = y^2 + 2$ par rapport à y, pour obtenir $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y$. Et d'autre part on dérive $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_x = 2xy$ par rapport à x pour obtenir $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y$. L'ordre dans lequel on effectue les dérivées n'a donc pas d'importance.

B.2 - On fait la même chose pour le cas 2. On démontre bien que l'on a $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_x = -1/y^2 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

C.1 - $\mathrm{d}f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y = (y^2+2)\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y$.

C.2 - $\mathrm{d}f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y = \dfrac{1}{y}\mathrm{d}x - \dfrac{x}{y^2}\mathrm{d}y$.