TP

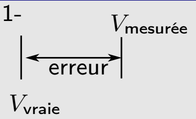
Mesures et incertitudes

Ce document présente les notions qui sont exigibles en physique-chimie concernant les mesures et les incertitudes. Certaines des notions sont également abordées dans le cours de SI.

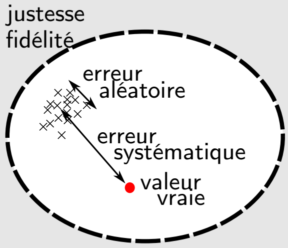
Plan du document

I Définitions

1-



2-
justesse
fidélité



3-
intervalle de confiance
- à 68% : incertitude type
- à 95% : incertitude élargie

4-
incertitude relative

II.1 On dispose d'une série de mesures

↓

type A

$(x \pm \Delta x)$ unité
avec Δx incertitude élargie :
- on prend la valeur moyenne des x_i pour x
- formule avec l'écart-type pour l'incertitude

II.2 On ne fait qu'une seule mesure

↓

type B

$(x \pm \Delta x)$ unité
avec Δx incertitude élargie :
- ▶ $\Delta x =$ graduation
- ▶ $\Delta x =$ notice appareil
- ▶ $\Delta x =$ dernier chiffre significatif
- ▶ $\Delta x =$ estimé avec bon sens
- ▶ etc...

III Répercussion des incertitudes dans un calcul

Formules de propagation des erreurs

ex. : $c = \dfrac{d}{t}$, Δd et Δt connus, $\rightarrow$ que vaut Δc ?

IV Écrire correctement le résultat final

$(x \pm \Delta x)$ unité ex. : $c = (342.1 \pm 0.4)$ m/s
- pour Δx un seul chiffre significatif
- pour x on enlève les chiffres qui sont noyés dans l'erreur
- penser à garder une valeur complète de x pour les calculs

V Comparaison entre expérience et théorie

- Côté expérience : $a_{\text{exp}} \pm \Delta a_{\text{exp}}$
- Côté théorie : $a_{\text{théo}} \pm \Delta a_{\text{théo}}$

$\Rightarrow$ ces deux intervalles doivent avoir des valeurs en commun

Ce qu'il faut connaître

▶1 Maîtriser le vocabulaire qui apparaît en gras dans la partie I-Définitions : mesurage, mesurande, valeur vraie, grandeur d'influence, erreur aléatoire et systématique, fidélité, justesse, incertitude relative.

▶2 Expliquer les notions : intervalle de confiance, incertitude type (à 68%) et élargie (à 95%),

Ce qu'il faut savoir faire

▶3 Si rien n'est précisé sur les incertitudes, écrire un résultat avec le bon nombre de chiffres significatifs (voir la fiche sur les chiffres significatifs).

▶4 Étant donnée une série de mesures, savoir calculer la valeur moyenne et l'incertitude de type A (la formule sera donnée, voir partie II.1).

- On mesure plusieurs fois la vitesse d'un train à l'aide d'un radar. On obtient les valeurs suivantes en km/h : 302, 301, 307, 310, 320, 295, 314. Exploiter cette série de mesures pour donner la vitesse du train sous la forme $v \pm \Delta v$, Δv étant l'incertitude élargie. [1]

▶5 Étant donnée une unique mesure, évaluer son incertitude (de type B, voir partie II.2).

- On mesure la vitesse d'un train à l'aide d'un radar : $v = 307\,\mathrm{km/h}$. Le fabricant du radar indique que son appareil est précis à 4%. Donner la vitesse du train sous la forme $v \pm \Delta v$, Δv étant l'incertitude élargie. [2]

▶6 Lors d'un calcul où les données possèdent des incertitudes, calculer l'incertitude sur le résultat (les formules seront données, voir partie III).

- On a mesuré la vitesse d'un train : $v = (307 \pm 6)\,\mathrm{km/h}$. Ce train doit parcourir une distance de $220 \pm 1\,\mathrm{km}$. Indiquer la durée du trajet, accompagnée de l'incertitude sur cette durée. [3]

▶7 Écrire correctement le résultat d'une mesure (valeur et incertitude avec le bon nombre de chiffres significatifs, voir partie IV).

- Mettre sous une écriture correcte les résultats suivants : $v = (415.32 \pm 1.7)\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $d = (110.12 \pm 27)\,\mathrm{m}$, etc. [4]

Introduction : Pourquoi des incertitudes ?

La mesure de grandeurs physiques (température, longueur, tension, masse, etc.) est une étape essentielle de presque tous les domaines qui touchent à la physique ou à la chimie.

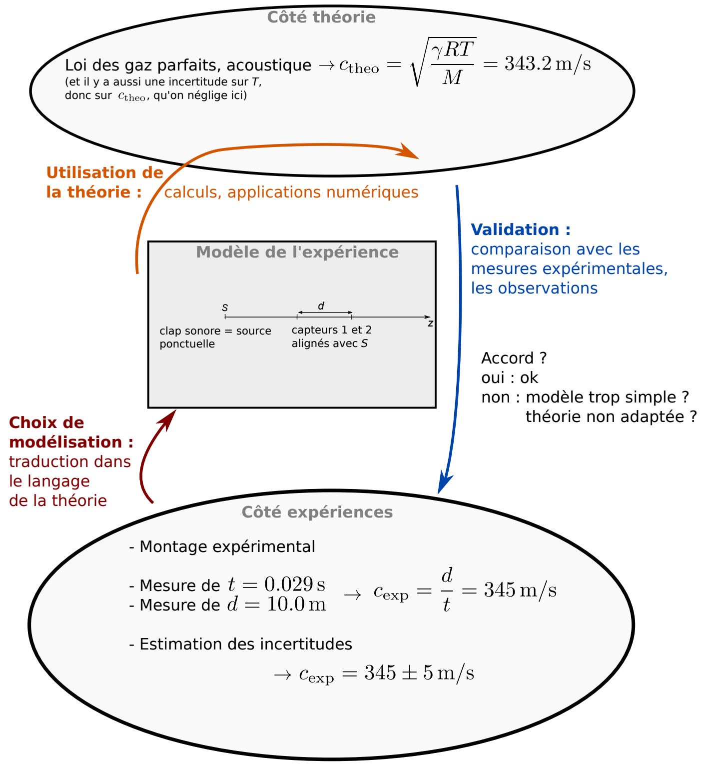
- Lorsqu'un chercheur, un ingénieur ou un étudiant veut vérifier expérimentalement une loi, il faut qu'il compare ses mesures aux prédictions théoriques. Cette comparaison se fait nécessairement à l'aide des incertitudes sur les valeurs expérimentales.

> **Prenons un exemple :** l'expérimentateur veut vérifier que la formule qui donne la vitesse des ondes sonores dans l'air est correcte. Son modèle affirme que $c_{\text{théorique}} = \sqrt{\gamma RT/M} = 343.2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ à 20°C. Puis il mesure le temps t mis par un clap sonore pour parcourir $d = 10.0\,\mathrm{m}$ et il en déduit la valeur expérimentale $c_{\text{exp}} = d/t$.
>
> Sauf coïncidence exceptionnelle, il ne trouvera jamais exactement $c_{\text{théorique}} = c_{\text{exp}}$! (et avec combien de chiffres significatifs ? en fait, on voit bien qu'on aura toujours $c_{\text{théorique}} \neq c_{\text{exp}}$)
>
> Par exemple il pourrait trouver $c_{\text{exp}} = d/t = 10.0\,\mathrm{m}/0.0290\,\mathrm{s} = 345\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Alors comment faire pour dire si théorie et expérience sont en accord ? C'est là qu'interviennent les incertitudes : il *faut* que l'expérimentateur puisse donner une idée de la précision de sa mesure pour pouvoir conclure.

1. Pour v faire la moyenne des mesures. Pour Δv utiliser la formule 3.
2. On a $v = 307\,\mathrm{km/h}$, et $\Delta v = 0.04 \times 307 = 12.28\,\mathrm{km/h}$. On garde un chiffre significatif sur l'incertitude en arrondissant au supérieur, donc $\Delta v = 2 \times 10^1\,\mathrm{km/h} = 0.2 \times 10^2\,\mathrm{km/h}$. Et finalement on écrit le résultat sous la forme $(3.1 \pm 0.2) \times 10^2\,\mathrm{km/h}$.
3. La formule est $t = d/v = 220/307 = 0.7166\,\mathrm{h}$. On calcule l'incertitude à l'aide de la formule 7 page 11. On trouve $\Delta t = 0.014 = 0.02\,\mathrm{h}$ (on garde un chiffre significatif et on arrondit au supérieur). Donc on écrit $t = 0.72 \pm 0.02\,\mathrm{h}$.
4. $v = (415 \pm 2)\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $d = (1.1 \pm 0.3) \times 10^2\,\mathrm{m}$

Si par exemple il estime que $c_{\text{exp}} = (345 \pm 5)\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, alors c'est en accord avec la théorie car la valeur théorique $c_{\text{théorique}} = 343.2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ est comprise dans l'intervalle $(345 \pm 5)\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Mais s'il estime que ses instruments et son protocole sont précis et que $c_{\text{exp}} = (345 \pm 1)\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, alors ce n'est pas en accord avec la théorie car 343.2 n'est pas dans l'intervalle 345 ± 1 : dans ce cas soit il y a une erreur dans le protocole expérimental, soit il y a des sources d'incertitudes mal estimées, soit la formule théorique ne s'applique pas pour diverses raisons (modèle trop simple car trop d'hypothèses simplificatrices, ...).



En bref, une mesure expérimentale sans son incertitude ne veut pas dire grand chose, et ne peut pas servir à valider ou infirmer une prédiction théorique.

- Les incertitudes de mesures interviennent également dans l'industrie ou l'ingénierie. Par exemple la valeur donnée par un capteur de pression dans une tuyère n'a pas beaucoup d'intérêt si l'on n'a pas une idée de l'incertitude associée.
- Il en est de même dans de nombreux autres domaines : le pesage dans les commerces, la détermination d'une concentration lors d'une analyse biologique, la mesure de vitesse par radar, le temps de course d'un sportif, etc.

En résumé, mesurer une grandeur n'est pas simplement rechercher la valeur de cette grandeur, mais aussi lui associer une incertitude afin de pouvoir qualifier la *qualité* de la mesure.

I Définitions

Il faut être capable de donner une définition de tous les termes en gras présents dans cette partie.

I.1 Vocabulaire de la mesure

La métrologie est la science de la mesure. Elle utilise un certain vocabulaire, dont les termes suivants :

- Réaliser un **mesurage** est la manière savante de dire que l'on réalise une mesure. Le mesurage est donc l'ensemble des opérations permettant d'effectuer la mesure, c'est-à-dire de déterminer l'intervalle de valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur.
- Le **mesurande** est la grandeur physique que l'on veut mesurer.

  Exemple : la valeur d'une résistance en Ohm, la température, la longueur d'une table, etc.
- La **valeur vraie** M_{vrai} du mesurande est la valeur que l'on obtiendrait si le mesurage était parfait. Un mesurage n'étant jamais parfait, cette valeur vraie est en pratique toujours inconnue.
- Une **grandeur d'influence** est une grandeur qui n'est pas celle mesurée, mais qui a une influence sur elle.

  Exemple : la température peut avoir une influence sur la longueur d'une tige de métal (dilatation du matériau), et on dit alors que la température est une grandeur d'influence.
- **L'erreur de mesure** est l'écart entre la valeur mesurée et la valeur vraie.

  Comme la valeur vraie est inconnue, on ne connaît pas non plus exactement l'erreur. La démarche consiste donc à évaluer l'erreur de mesure commise, et c'est justement là l'objectif de l'évaluation des incertitudes.

I.2 Erreur de mesure systématique et aléatoire

Les erreurs de mesure peuvent être dues à divers facteurs : imprécision de l'appareil de mesure (temps de réponse, exactitude, sensibilité), évolution non contrôlée des grandeurs d'influences (p. ex. la température a changé), lecture des graduations par l'opérateur (p. ex. ménisque avec une burette, erreur de parallaxe), ou bien non reproductibilité parfaite de l'expérience (il y a toujours de petites variations).

Une erreur possède généralement deux composantes :

- **L'erreur aléatoire** : elle varie pour chaque mesure.

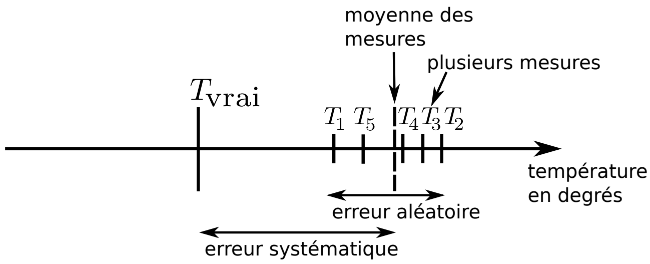
  Elle est mise en évidence en répétant les mesures avec le même protocole. Elle est liée à la non reproductibilité parfaite de l'expérience (à cause de l'opérateur qui n'est pas parfait, ou à cause de variation des grandeurs).

  Si l'erreur aléatoire est faible, le protocole de mesure est dit **"juste"**.

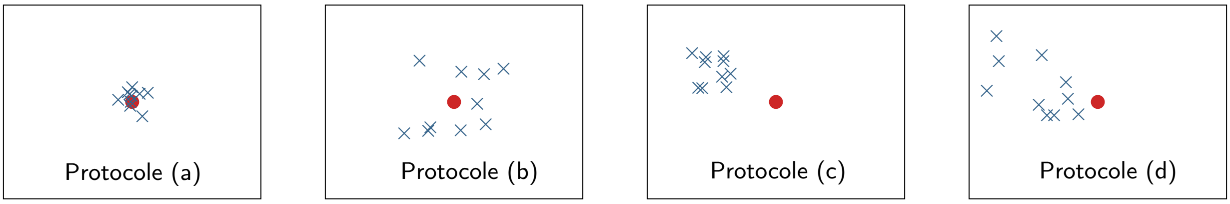
- **L'erreur systématique** : elle est identique pour toutes les mesures.

  Elle peut provenir d'un appareil mal étalonné, mal utilisé ou défectueux, ou d'une faille dans le protocole de mesure (p. ex. oubli de prendre en compte la résistance interne du voltmètre si nécessaire, oubli de prendre en compte la dilatation du pied à coulisse s'il est utilisé en dehors de sa gamme de température, etc.).

  Si l'erreur systématique est faible, le protocole de mesure est dit **"fidèle"**.

> **Exemple :** On mesure la température de la solution dans un bécher à l'aide d'un thermomètre à alcool.
>
> On répète plusieurs fois cette mesure pour obtenir les valeurs T_1, ..., T_5. On suppose également qu'on connaît la valeur vraie de la température dans le bécher. On place tout ceci sur un axe, comme ci-contre.
>
> 
>
>
> On voit ici qu'il y a une erreur systématique, car en moyenne le thermomètre ne donne pas la bonne température : le protocole n'est donc pas fidèle. (Il se peut par exemple que les graduations du thermomètres soient décalées.) D'un autre coté, la dispersion des mesures est liée à l'erreur aléatoire de mesure. Plus cette dispersion est faible plus le protocole est dit juste. (L'origine de cette erreur aléatoire peut être diverse : température non homogène dans le bécher, difficulté de lecture des graduations, etc.)

$\rightsquigarrow_1$ Sur chacun des protocoles ci-dessous, dire s'il est plutôt juste, fidèle, les deux ou aucun des deux. Les croix représentent les valeurs mesurées, et le rond central la valeur vraie.



I.3 Intervalle de confiance

L'incertitude de mesure est une estimation de l'erreur de mesure.
Elle permet de définir un intervalle dans lequel la valeur vraie a *un certain pourcentage de chances* de se trouver.
Cet intervalle est appelé **l'intervalle de confiance**.
On donnera donc le résultat d'une mesure sous la forme $\boxed{x \pm \delta x}$ accompagnée du pourcentage de confiance.

> **Exemple :** On réalise une mesure de longueur d'une salle à l'aide d'un télémètre laser. L'appareil indique $x = 2.52\,\mathrm{m}$.
>
> - On suppose que l'on connaît l'incertitude δx à 95% (donnée dans la notice par exemple) : $\delta x = 0.04\,\mathrm{m}$.
>
>   On peut alors affirmer que la longueur de la salle a une probabilité de 95% de se trouver dans l'intervalle $2.52 \pm 0.04\,\mathrm{m}$.
>
> - On peut choisir de donner l'incertitude avec un intervalle de confiance moins précis. Si par exemple la notice indique que $\delta x = 0.02\,\mathrm{m}$ à 68%, alors on peut alors affirmer que la longueur de la salle a

> une probabilité de 68% de se trouver dans l'intervalle $2.52 \pm 0.02\,\mathrm{m}$.
>
> ▶ On pourrait aussi affirmer, toujours d'après la notice, que la longueur de la salle a une probabilité de 50% de se trouver sans l'intervalle $2.52 \pm 0.01\,\mathrm{m}$. Etc...

Évidemment, plus δx est petit, plus la probabilité que la valeur vraie soit dans l'intervalle $x \pm \delta x$ est faible.

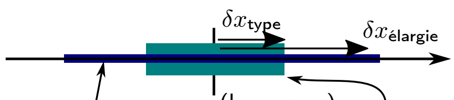
En pratique, on considère deux pourcentages, auxquels on donne deux noms et qu'il faut connaître :

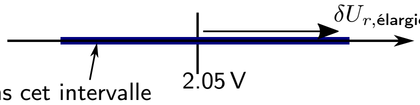
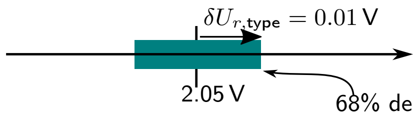
- L'intervalle de confiance à 68% : si on dit que la valeur vraie a **68%** de chance d'être dans l'intervalle $\boxed{x \pm \delta x_{\text{type}},}$ alors on dit que δx est **l'incertitude type**.
- L'intervalle de confiance à 95% : si on dit que la valeur vraie a **95%** de chance d'être dans l'intervalle $\boxed{x \pm \delta x_{\text{élargie}},}$ alors on dit que δx est **l'incertitude élargie**.

  On a $\boxed{\delta x_{\text{élargie}} \simeq 2\,\delta x_{\text{type}}.}$

  On utilisera l'incertitude élargie pour donner un résultat.

Pour conclure, on peut schématiser les choses comme ci-dessous :



> **Exemple :** On mesure la tension aux bornes d'une résistance à l'aide d'un voltmètre. L'appareil indique $U_r = 2.05\,\mathrm{V}$. La notice permet de dire que l'incertitude élargie est de $0.02\,\mathrm{V}$. On écrira alors $U_r = 2.05 \pm 0.02\,\mathrm{V}$ en précisant "incertitude élargie" ou de façon synonyme "intervalle de confiance à 95%".
>
> 
>
>
> 
>

Remarque : l'approche suivie dans ce document est quelque peu simplifiée. On suppose que toutes les distributions suivent des lois gaussiennes (nécessaire pour avoir les résultats ci-dessus sur δx_{type} et $\delta x_{\text{élargie}}$), on néglige les coefficients de Student, ... Vous entendrez peut-être parler de ceci en école d'ingénieur. Des compléments plus précis sont disponibles sur le site de la classe, mais ne sont pas nécessaire pour cette année. Pour ce qui concerne les mesures en CPGE, les approximations faites sont largement justifiées, notamment par le fait que l'incertitude elle-même est entachée d'incertitude, et qu'il est donc inutile de l'estimer précisément (sauf si on a un grand nombre de mesures, supérieur à 50). Pour les concours, maîtriser le contenu du présent document serait parfait !

I.4 Incertitude relative

Prenons par exemple la valeur expérimentale $c = (345 \pm 5)\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

L'incertitude relative est définie comme $\dfrac{\Delta c}{c} = \dfrac{5}{345} = 0.014$. On l'exprime souvent en pourcentage, soit ici $\dfrac{\Delta c}{c} = 1.4\%$.

De manière générale, l'incertitude relative est $\dfrac{\Delta x}{x}$. Elle n'a pas d'unité.

$\rightsquigarrow_2$ Une mesure de pression dans une conduite au manomètre différentiel indique une pression $p = 10.5\,\mathrm{bar}$. Le fabricant indique que son appareil est précis à 5% (intervalle de confiance élargie).
Quelle est l'incertitude élargie sur la mesure de pression ? Quel est par définition le niveau de confiance associé ?
Même question pour l'incertitude type.

II Évaluer les incertitudes

Cette partie explique comment estimer l'incertitude δx (que ce soit l'incertitude type δx_{type} ou l'incertitude élargie $\delta x_{\text{élargie}}$).

Il y a deux cas de figure :

- soit on a répété la mesure plusieurs fois, et on peut alors traiter statistiquement les données pour estimer δx (on parle alors de calcul d'incertitude de type A) ;
- soit on a réalisé une seule mesure, et il faut alors évaluer δx à l'aide d'estimations des incertitudes de lectures ou des appareils (on parle alors de calcul d'incertitude de type B).

II.1 Cas d'une série de mesures : incertitude de type A

Lorsqu'il est possible de répéter plusieurs fois la mesure, on utilise des outils statistiques.
Supposons que l'on fasse une série de mesures x_1, x_2, ..., x_N d'un même mesurande. Par exemple, on mesure plusieurs fois le temps de chute d'un objet depuis une hauteur de 1 m. Alors :

- La meilleure estimation de la valeur vraie X_{vraie} est la moyenne des mesures :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i. \tag{1}$$

- La meilleur estimation de l'incertitude type δx_{type} (donc qui donne l'intervalle de confiance à 68%), est l'écart-type σ de la série de donnée, divisé par $\sqrt{N}$:

$$\delta x_{\text{type}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \times \sigma = \frac{1}{\sqrt{N}} \times \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}. \tag{2}$$

  On rappelle en effet que l'écart-type $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}$ d'une série de données donne une idée de la dispersion ou de l'étalement des données. Le facteur $1/\sqrt{N}$ montre que *plus on fait de mesures*, plus l'incertitude sera faible et donc *plus le résultat sera précis*.

- On a donc l'incertitude élargie, qui donne l'intervalle de confiance à 95% :

$$\delta x_{\text{élargie}} = 2\,\delta x_{\text{type}} = \frac{2\sigma}{\sqrt{N}}. \tag{3}$$

Par défaut, on donnera le résultat avec l'incertitude élargie : on a 95% de chances que la valeur vraie soit dans l'intervalle $\bar{x} \pm \dfrac{2\sigma}{\sqrt{N}}$.

Exemple : On mesure la concentration massique d'un sérum physiologique à l'aide d'un titrage conductimétrique. Chaque groupe de la classe réalise le protocole et la mesure. Les résultats de chaque groupe sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

Groupe	1	2	3	4	5	6
Concentration massique trouvée (g/L)	9.12	9.18	8.80	9.52	8.71	8.44

On calcule la moyenne des concentrations : on trouve $\bar{c} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} c_i = 8.96\,\text{g/L}$.

On calcule l'écart-type : $\sigma = \sqrt{\frac{1}{6-1}\sum_{i=1}^{6}(c_i - \bar{c})^2} = 0.39\,\text{g/L}$.

On peut alors obtenir l'incertitude élargie $\delta x = \frac{2\sigma}{\sqrt{6}} = 0.31\,\text{g/L}$.
En conclusion, cette série d'expériences permet d'affirmer que la concentration du sérum est $c = 8.96 \pm 0.31\,\text{g/L}$ avec un intervalle de confiance de 95% (la concentration vraie a 95% de chance de se trouver dans cet intervalle).
(On verra dans la partie IV que les règles d'écriture du résultat imposent plutôt d'écrire $c = 9.0 \pm 0.3\,\text{g/L}$, mais ce n'est pas important pour l'instant.)

Remarquons enfin que pour traiter un mesurage avec cette méthode, il faut que la répétition des mesures permettent d'obtenir une variabilité dans les résultats. Par exemple on ne va pas répéter plusieurs fois la mesure d'une distance à la règle graduée : on trouvera toujours pareil et ceci n'augmentera pas la précision ! Dans les cas limites où la variabilité est faible, il faut aussi considérer l'incertitude de type B et prendre finalement $\delta x = \sqrt{\delta x_A^2 + \delta x_B^2}$. Mais ceci n'arrivera pas cette année.

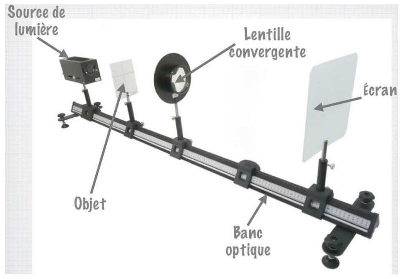
II.2 Cas d'une seule mesure : incertitude de type B

Lorsque la mesure ne peut être effectuée qu'une seule fois (pour des raisons pratiques, ou de temps, ou parce que répéter la mesure n'a aucun sens), alors il faut évaluer l'incertitude autrement.
Ceci dépend du type d'appareil utilisé. On liste ci-dessous plusieurs cas de figure, et on se reportera à cette liste en TP.

- **Mesure de longueur ou d'angle avec un instrument gradué (une règle, la règle d'un banc optique, le vernier d'un goniomètre) :** l'incertitude élargie peut être choisie comme une graduation. (On peut aussi choisir une demi-graduation si on est plus optimiste.)

> **Exemple :** On mesure 3.4 cm avec une règle graduée au mm, on écrira $l = (3.4 \pm 0.1)$ cm (intervalle de confiance à 95%).

> **Exemple en optique :** On souhaite mesurer la distance OA' entre lentille et écran lorsque l'image de l'objet sur l'écran est nette. L'axe du banc optique est gradué au mm, et on pourrait donc prendre $\delta OA' = 1$ mm pour l'incertitude élargie.
>
> **Attention cependant**, il se peut qu'il soit difficile d'apprécier, à l'œil, la position de l'écran pour laquelle l'image est parfaitement nette. C'est alors ceci qui domine l'incertitude. Supposons par exemple que l'on observe un image nette pour une position de l'écran comprise en $OA' = 3.2$ cm et $OA' = 3.6$ cm. On prendra alors $OA' = 3.4 \pm 0.2$ cm.



- **Mesure d'un volume avec une verrerie graduée (burette, pipette graduée, éprouvette graduée) :** l'incertitude élargie est indiquée sur la verrerie.

  Attention, ceci suppose que vous manipulez correctement (volume lu exactement en bas du ménisque). Si on manipule de façon moins précise, ou bien si l'incertitude n'est pas indiquée sur la verrerie, alors on prend une graduation pour $\delta x_{\text{élargie}}$.

> **Exemple :** Une burette graduée de 40 mL indique une incertitude de ± 0.05 mL. Elle est graduée tous les 0.1 mL.
>
> On lit un volume de 30 mL.
>
> On retiendra une graduation pour $\delta x_{\text{élargie}}$, et donc le volume contenu est $V = (30.0 \pm 0.1)$ mL.

- **Mesure d'un volume avec une verrerie jaugée (pipette jaugée, fiole jaugée) :** l'incertitude (élargie) est indiquée sur la verrerie. Bien sûr, c'est le cas si on a manipulé parfaitement (ménisque au niveau du trait de jauge par ex.).

Exemple : une pipette jaugée de 25 mL indique une incertitude de ± 0.03 mL. Le volume que l'on prélève en manipulant parfaitement est donc $V = (25.00 \pm 0.03)$ mL.

- **Mesure à l'aide d'un instrument de mesure numérique (voltmètre, ampèremètre, pH-mètre, conductimètre) :** Soit on dispose de la notice, on suit alors ce qui est indiqué car le constructeur donne souvent l'incertitude élargie (95%).

  Soit on ne dispose pas de la notice, et on peut alors considérer que l'incertitude élargie est donnée par $\pm$ le dernier chiffre affiché. (Notons que l'incertitude que donnerait la notice est en général plus grande.)

Exemple : Un conductimètre plongé dans une solution indique une conductivité $\sigma = 12.22\,\mathrm{mS/cm}$. Le calibre utilisé est $19.99\,\mathrm{mS/cm}$ (c-à-d qu'au delà de cette valeur l'appareil sature).

La notice ci-contre indique que l'exactitude est de $\pm 1\%$ de la pleine échelle, donc il faut comprendre que l'incertitude élargie est $\delta\sigma = \dfrac{1}{100} \times 19.99\,\mathrm{mS/cm} = 0.2\,\mathrm{mS/cm}$.

On écrira donc pour cette mesure $\sigma = 12.2 \pm 0.2\,\mathrm{mS/cm}$.

Remarque : La résolution du conductimètre, sur ce calibre, est de $0.01\,\mathrm{mS/cm}$ (c'est le dernier chiffre affiché sur le cadran). On remarque donc que l'incertitude, qui est de $0.2\,\mathrm{mS/cm}$, est supérieur à la variation de ce dernier chiffre.

Gamme	0.0 à 199.9 µS/cm / 0 à 1999 µS/cm 0.00 à 19.99 mS/cm / 0.0 à 199.9 mS/cm
Résolution	0.1 µS/cm / 1 µS/cm 0.01 mS/cm / 0.1 mS/cm
Exactitude	±1% pleine échelle (sauf erreur de la sonde) **(@20°C)**
Etalonnage	Manuel en un point à l'aide d'un potentiomètre
Temperature Compensation	Manuelle de 0 à 50°C **avec** β=2%/°C
Sonde (incluse)	**HI 76300**, capteur platine avec 1 m de câble
Alimentation	12 Vdc (adaptateur inclus)
Conditions d'utilisation	0 à 50°C HR max 95% sans condensation
Dimensions	235 x 222 x 109 mm
Poids	1.3 Kg

Exemple : Un voltmètre indique une tension $V_0 = -8.45\,\mathrm{mV}$. Le calibre utilisé est de $200\,\mathrm{mV}$.

La notice indique que la précision, pour ce calibre, est de $\pm 0.5\% + 10\mathrm{d}$.
Il y a donc deux contributions à l'incertitude élargie ΔV_0 :

- $0.5\% \times V_0 = 0.042\,\mathrm{mV}$.
- Le "d" signifie dernier digit affiché, c-à-d de la plus petite variation perceptible à l'affichage : ici cette plus petite variation est de $0.01\,\mathrm{mV}$. On remarque qu'elle dépend du calibre utilisé.

  Ainsi, $10\mathrm{d} = 10 \times 0.01 = 0.1\,\mathrm{mV}$.

On a donc $\Delta V_0 = 0.042 + 0.1 = 0.142 \simeq 0.2\,\mathrm{mV}$ (on garde un chiffre significatif et on arrondit au supérieur).

Finalement on écrira $V_0 = -8.45 \pm 0.2\,\mathrm{mV}$, soit en tenant compte des règles d'écriture : $V_0 = -8.5 \pm 0.2\,\mathrm{mV}$.

Remarque : Ici aussi l'incertitude est plus grande que la variation du dernier chiffre affiché sur l'appareil.

TENSION AC	200 mV, 2, 20, 200 V	± 0,5% + 10d	10-100 µV-1-10 mV
	750 V (< 1KHz)	± 0,7% + 10d	100 mV
	750 V (> 1KHz < 5KHz)	± 2,0% + 10d	100 mV

Protection: 500 V AC rms sur calibres 200 mV - 200 V
750 V AC rms sur calibre 750 V
Impédance d'entrée: 10 MΩ, moins de 50 pF
Type de conversion: TRMS

- **Mesure avec un oscilloscope :** La précision d'un oscilloscope dépend du nombre de bit sur lequel est encodée chaque valeur du signal (8 bits, soit 256 valeurs pour nos oscilloscopes qui servent à encoder entre $+V_{\max}$ et $-V_{\max}$), du nombre d'échantillons maximal pris par seconde, du nombre de points sur lequel est numérisé le signal (2500 points pour les nôtres), et de tout le processus de conversion analogique vers numérique.

  Il faut donc consulter la notice. Pour les oscilloscopes utilisés en TP, la précision est de l'ordre de :

  - $\pm 4\%$ en vertical (donc pour la tension),
  - $\pm 0.5\%$ en horizontal (donc en temps).

  Si le signal est bruité et donc qu'il n'est pas évident de placer les curseurs, ou si les mesures automatiques fluctuent, et que ceci amène à dépasser les incertitudes annoncées ci-dessus, alors l'incertitude doit être donnée par la marge d'erreur de placement des curseurs ou par l'étendue des fluctuations.

  Remarque : Un voltmètre est en général plus précis qu'un oscilloscope pour réaliser une mesure de tension.

  Remarque : Lorsque l'on utilise les curseurs, on pourrait estimer l'incertitude comme étant un ou deux crans de variation des curseurs. Également, lorsque l'on utilise le mode `mesure` on pourrait prendre pour incertitude le dernier chiffre affiché. Dans les deux cas, on sous estime l'incertitude réelle, parfois de beaucoup.

  Remarque : Ci-dessous un extrait de la notice de l'oscilloscope utilisé en TP :

Précision de mesure CC, mode d'acquisition par Moyennage	*Type de mesure*	*Précision*
	Moyenne de ≥ 16 signaux, la position verticale étant définie sur zéro	±(3 % × lecture + 0,1 div + 1 mV) lorsque la valeur 10 mV/div ou supérieure est sélectionnée.

Précision de la mesure de temps Delta (Totalité de la bande passante)	*Conditions*	*Précision*
	Monocoup, mode Echantillon	±(1 intervalle d'échantillonnage + 100 ppm × lecture + 0,6 ns)

- **Valeur indiquée sur des composants :** Lorsque l'on utilise des résistances ou des condensateur, ou bien des lentilles en optique, on fait confiance à la valeur indiquée par le constructeur. Pour connaître l'incertitude sur ces valeurs (qui va dépendre de la qualité et donc du prix des composants), on consulte la notice ou on regarde sur le composant lui-même s'il n'y a pas d'indication.

  On peut aussi choisir de mesurer nous-même la valeur en question, avec un ohmmètre par exemple.

  Enfin, par défaut et en l'absence d'indications, on prendra l'incertitude comme portant sur le dernier chiffre indiqué.

  > **Exemple :** La tolérance des résistances électriques est indiquée par la couleur du dernier anneau (ou avant dernier) : $\pm 10\%$ si argent, $\pm 5\%$ si or (typiquement celles utilisées en TP), etc. On considère que ceci donne l'incertitude élargie.
  >
  > Une résistance de $1\,\mathrm{k\Omega}$ avec un anneau or est donc en fait connue à $\pm\dfrac{5}{100} \times 1000\,\Omega = \pm 50\,\Omega$, et donc on écrira $R = (1.00 \pm 0.05) \times 10^3\,\Omega$.

  Remarque : En l'absence de plus d'indication, on prendra $\pm 5\%$ pour les capacités, bobines et condensateurs utilisés en TP.

- **Données numériques issues de tables ou d'un énoncé :** Si des données ne sont pas assorties d'une incertitude, alors on considère que le dernier chiffre significatif n'est pas certain. Ceci permet d'obtenir l'incertitude élargie.

  > **Exemple :** On lit dans une table $R = 8.314\,\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$, on dira alors que R est compris entre 8.313 et $8.316\,\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$ (à 95%).

  Remarque : On rencontre parfois, sur Wikipedia notamment, la notation avec parenthèses, par exemple : $G = 6.674\,08(31) \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$. Ceci signifie que l'incertitude type est donnée par $G = (6.674\,08 \pm 0.000\,31) \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$.

- **Incertitude liée à l'appréciation de l'expérimentateur :** Le phénomène à mesurer n'est parfois pas précisément observable, et il faut alors estimer soi-même l'incertitude.

Exemples :

- En électronique, pour un circuit RLC on veut obtenir la valeur de la résistance R qui fait passer du régime transitoire apériodique au régime pseudo-périodique : le moment exact où l'on passe de l'un à l'autre est difficile à estimer. On peut par exemple dire que l'on est certain qu'il n'y a pas d'oscillation pour $R = 2.0\,\mathrm{k\Omega}$, et certain qu'il y en a une pour $R = 1.6\,\mathrm{k\Omega}$. On écrira alors que $R = (1.8 \pm 0.2)\,\mathrm{k\Omega}$.
- En optique, on cherche la position de l'écran où l'image apparaît nette. Ceci est réalisé visuellement pour une certaine plage de positions de l'écran. C'est souvent cette plage qui domine l'incertitude.
- En électronique, on veut repérer la fréquence de résonance d'un circuit RLC. Le lieu exact de la résonance est parfois difficile à estimer. C'est alors à vous de dire dans quelle plage de fréquences elle se situe, et c'est ceci qui dominera l'incertitude.
- Etc...

III Répercussion des incertitudes dans un calcul

Supposons que l'on veuille mesurer la vitesse du son dans l'air, en mesurant le temps t mis par un "clap" sonore pour parcourir une certaine distance d.
Suite aux mesures, on obtient $d = 10.0 \pm 0.2\,\text{m}$, et $t = 0.0290 \pm 0.0005\,\text{s}$.
On sait que la vitesse vaut alors $c = \dfrac{d}{t} = 344.83\,\text{m/s}$. Mais quelle est l'incertitude sur la vitesse ?
Il existe pour cela des formules, qui ne sont pas à connaître et qui vous seront données :

- Le cas général est celui d'une grandeur y qui dépend d'autres grandeurs x_1, ..., x_n. Si on note Δx_i l'incertitude sur la mesure de x_i, alors celle sur y est :

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \Delta x_i^2}. \tag{4}$$

  Si les Δx_i sont des incertitudes types, alors Δy également. Si les Δx_i sont des incertitudes élargies, alors Δy également [5].

Cas particuliers souvent utiles :

- Dans le cas où $y = \lambda x$ avec λ un réel, alors

$$\Delta y = |\lambda| \Delta x. \tag{5}$$

- Dans le cas où $y = x_1 + x_2$, ou bien $y = x_1 - x_2$, avec la même incertitude sur x_1 et sur x_2 que l'on notera Δx, alors :

$$\Delta y = \sqrt{2}\Delta x \simeq 2\Delta x. \tag{6}$$

  (On retiendra la formule approchée $2\Delta x$, qui donne une borne supérieure et qui a l'avantage d'être intuitive.)

- Dans le cas où $y = x_1 \times x_2 \times x_3 \times ...$ ou bien $y = \dfrac{x_1}{x_2 x_3 ...}$ ou tout autre combinaison de multiplications et divisions, alors

$$\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_3}{x_3}\right)^2 + ...} \tag{7}$$

D'autres cas particuliers, moins souvent utiles :

- Dans le cas où $y = ax_1 + bx_2$ ou bien $y = ax_1 - bx_2$, alors

$$\Delta y = \sqrt{(a\Delta x_1)^2 + (b\Delta x_2)^2}. \tag{8}$$

- Dans le cas où $y = \lambda x^\alpha$ avec λ, α réels, alors

$$\Delta y = |\lambda|\,|\alpha x^{\alpha-1}|\Delta x. \tag{9}$$

- Dans le cas où $y = x_1^\alpha \times x_2^\beta$, alors

$$\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\left(\alpha\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\beta\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2}. \tag{10}$$

> **Exemple :** Dans l'exemple de la vitesse du son au début du cette partie, on a donc $\Delta c = c \times \sqrt{\left(\dfrac{0.2}{10.0}\right)^2 + \left(\dfrac{0.0005}{0.0290}\right)^2} = 9\,\text{m/s}$.
> On écrit donc $c = (344 \pm 9)\, m/s$.

5. Mais uniquement car on utilise ici la formule approchée $\Delta x_{\text{élergie}} \simeq 2\Delta x_{\text{type}}$.

IV Écrire correctement le résultat final

Une fois le calcul de x et de l'incertitude δx associée effectué, il reste à noter correctement le résultat. Certaines règles conventionnelles sont à suivre :

- 1 – On note d'abord la valeur de x avec beaucoup de chiffres significatifs, car c'est cette valeur non arrondie qu'il faudra réutiliser pour faire des calculs qui font intervenir x.
- 2 – On note l'incertitude δx avec un seul chiffre significatif. On arrondit au supérieur.

  (Il est inutile d'être plus précis car δx est une *estimation* de l'erreur, elle-même entachée d'incertitude.)
- 3 – On enlève les chiffres significatifs de x qui sont noyés dans l'incertitude.

> **Exemple :** Détaillons le calcul de c ci-dessus :
> 1 - On calcule $c = d/t = 344.83\,\mathrm{m/s}$.
> 2 - On calcule $\Delta c = ... = 9.08\,\mathrm{m/s}$, que l'on arrondit à $9\,\mathrm{m/s}$ (un seul chiffre significatif pour l'incertitude).
> 3 - On ne retient pas les chiffres de c qui sont moins précis que l'incertitude, donc ici on s'arrête au chiffre des unités. On arrondit. Finalement, $c = (344 \pm 9)\,\mathrm{m/s}$.

> **Exemples :**
> $c = 123.456 \pm 2.2\,\mathrm{m/s}$: on retient ± 3 pour l'incertitude, et on écrit $c = 123 \pm 3\,\mathrm{m/s}$.
> $c = 123.456 \pm 0.26\,\mathrm{m/s}$: on retient ± 0.3 pour l'incertitude, et on écrit $c = 123.5 \pm 0.3\,\mathrm{m/s}$.
> $c = 123.456 \pm 13\,\mathrm{m/s}$: on retient $\pm 2 \times 10^1$ pour l'incertitude, et on écrit $c = (12 \pm 2) \times 10^1\,\mathrm{m/s}$.
> $c = 123.456 \pm 213\,\mathrm{m/s}$: on retient $\pm 3 \times 10^2$ pour l'incertitude, et on écrit $c = (1 \pm 3) \times 10^2\,\mathrm{m/s}$.

V Comparaison entre valeur expérimentale et valeur théorique

À la fin d'un protocole de mesure, il arrive souvent que l'on veuille comparer la valeur mesurer expérimentalement (notons la x_{exp}) et la valeur prédite par la théorie et le modèle utilisé (notons la $x_{\text{théo}}$).
Seule la prise en compte des incertitudes permet de faire ceci.

> **Exemple** : Reprenons l'exemple de la mesure de la vitesse du son.
>
> - **Coté expérience :** L'expérimentateur mesure t et d et leurs incertitudes, puis en déduit $c_{\text{exp}} = \dfrac{d}{t} = (345 \pm 5)\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
> - **Coté théorie :** Le modèle classique donne $c_{\text{théo}} = \sqrt{\dfrac{\gamma R T}{M}}$ avec R constante des gaz parfaits, γ indice adiabatique de l'air, M masse molaire de l'air, et T la température. À 20°C On obtient $c_{\text{théo}} = 343.2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
>
>   Cependant, la température n'est pas connue exactement : il y a une incertitude ΔT, qui donne lieu à une incertitude sur $c_{\text{théo}}$ également.
>
>   Supposons par exemple que l'on obtient $c_{\text{théo}} = (343.2 \pm 0.8)\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
>
> On voit ici que la gamme de valeurs possibles pour c_{exp} recoupe la gamme de valeurs possibles pour $c_{\text{théo}}$. On conclue donc qu'expérience et théorie sont compatibles. L'expérience confirme la théorie et le modèle utilisés.

De manière générale, on a un ensemble de valeurs $x_{\text{exp}} \pm \Delta x_{\text{exp}}$ pour la valeur expérimentale, et $x_{\text{théo}} \pm \Delta x_{\text{théo}}$ pour la valeur théorique.

- Si ces deux intervalles ont une intersection commune, alors expérience et théorie sont compatibles. L'expérience confirme la théorie et le modèle utilisés.
- Si ces deux intervalles n'ont aucune valeur commune, alors l'expérience ne permet pas de confirmer la théorie. Plusieurs possibilités :
  - **Un problème venant de l'expérimentateur :** on a mal manipulé et commis une erreur de protocole, ou fait une erreur de calcul quelque part.
  - **Un problème matériel :** le matériel est défectueux, les composants ou solutions utilisées n'ont pas les valeurs indiquées...
  - **Un problème dans l'estimation des incertitudes :** on les a sous-estimées.
  - **Un problème au niveau de la théorie ou du modèle utilisé :** Si toutes les causes précédentes sont écartées, alors c'est que l'expérience invalide le modèle utilisé.

    Par exemple dans une manipulation en électronique avec un ALI il se peut que le modèle idéal à gain infini de l'ALI ne soit pas approprié, ou que l'on doive prendre en compte le temps de monté de la sortie de l'ALI, etc...

  Dans un compte rendu, on évitera les affirmations trop vagues qui accusent uniquement le matériel. On pourra dire par exemple "Les valeurs expérimentales et théoriques ne sont pas en accord, il y a peut-être un problème matériel, eu une erreur de ma part, ou un modèle utilisé trop simple".