

Problème I – Microphones

Extrait de CCP TSI physique 2011, parties 1 et 2 du problème I

I.1 – Première partie : Etude d'un condensateur

1. ★ On considère un point M de coordonnées (x, y, z) .

Les plans (M, y, z) et (M, x, z) sont des plans de symétrie de la distribution de charges.

Or le champ électrique est contenu dans les plans de symétrie.

On en conclut que \vec{E} est selon \vec{u}_z : $\vec{E}(M) = E(x, y, z)\vec{u}_z$.

★ La distribution de charge est invariante par translation selon l'axe Ox , et par translation selon l'axe Oy . Les composantes de \vec{E} ne dépendent donc ni de x ni de y . On a donc $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$.

★ On considère un point $M(x, y, z)$, et son symétrique par rapport au plan (O, x, y) (le plan des charges), $M'(x, y, -z)$.

Le plan (O, x, y) est plan de symétrie de la distribution de charges. Or le champ électrique est symétrique par rapport aux plans de symétrie. On a donc $\vec{E}(M')$ symétrique de $\vec{E}(M)$. Dans le cas présent, ceci se traduit par $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$, donc la fonction $E(z)$ est impaire.

2. ★ L'équation de Maxwell-Gauss est $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$.

On l'applique par exemple pour $z > 0$. Il n'y a pas de charges dans cette zone, donc $\rho = 0$.

De plus comme $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$, on a $\text{div } \vec{E} = \frac{dE}{dz}$.

On obtient donc $\frac{dE}{dz} = 0$, donc E ne dépend pas de z , donc le champ électrique est uniforme au dessus du plan.

On montre de même qu'il est uniforme au dessous du plan.

(Attention, cela ne veut pas dire que sa valeur au dessus du plan est la même que celle au dessous du plan.)

★ On place un point $M(x, y, z)$ au dessus du plan ($z > 0$).

Choix de la surface de Gauss : un parallélépipède de hauteur $2z$ et de base $a \times a$ (il faut obligatoirement faire un schéma ici).

Calcul du flux de \vec{E} :

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \oiint_{S_{\text{Gauss}}} \vec{E} \cdot \vec{dS} \\
 &= \iint_{S_{\text{latérales}}} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \iint_{S_{\text{haut en } z}} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \iint_{S_{\text{bas en } -z}} \vec{E} \cdot \vec{dS} \\
 &= 0 + \iint_{S_{\text{haut en } z}} E(z)\vec{u}_z \cdot dS\vec{u}_z + \iint_{S_{\text{bas en } -z}} E(-z)\vec{u}_z \cdot dS(-\vec{u}_z) \\
 &= 0 + \iint_{S_{\text{haut en } z}} E(z)\vec{u}_z \cdot dS\vec{u}_z + \iint_{S_{\text{bas en } -z}} -E(z)\vec{u}_z \cdot dS(-\vec{u}_z) \quad \text{car } E(z) \text{ impaire} \\
 &= 0 + E(z) \times a^2 + E(z) \times a^2 \\
 &= 2a^2 E(z).
 \end{aligned}$$

Calcul de Q_{int} : on a ici $Q_{\text{int}} = a^2\sigma$.

Théorème de Gauss : $\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$, d'où $2a^2E(z) = \frac{a^2\sigma}{\epsilon_0}$, d'où $E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.

On a donc, pour $z > 0$, $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z$.

Enfin, pour $z < 0$ on a par imparité de $E(z)$, $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z$.

3. On a montré que $E(z)$ est impaire. On a donc $E(0) = 0$.

(La valeur de E en 0 n'a en fait pas vraiment de sens dans le cadre du modèle d'une distribution surfacique de charges. Il faudrait plutôt considérer une distribution volumique. On montre alors, avec les mêmes considérations de symétries, que $E(0) = 0$.)

4. On utilise la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$. Comme $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$, le gradient a une composante selon z seulement et on a donc $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$. On a donc $V = V(z)$.

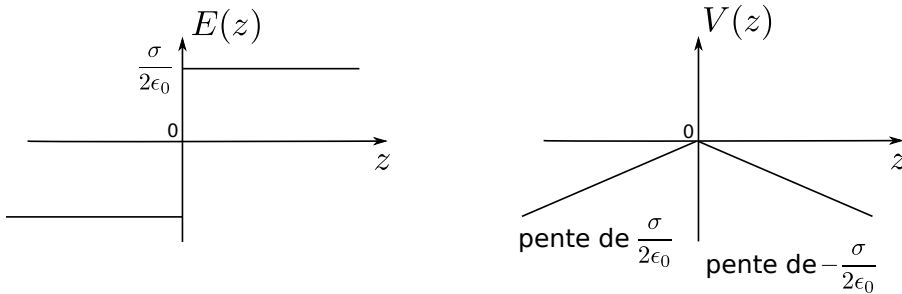
La relation devient donc $E(z) = -\frac{dV}{dz}$.

Pour $z > 0$ on a donc $\frac{dV}{dz} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, d'où $V(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + A$ avec A une constante. On veut $V(0) = 0$ et V continue en 0, donc $A = 0$.

Pour $z < 0$ on a donc $\frac{dV}{dz} = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, d'où $V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + B$ avec B une constante. On veut $V(0) = 0$ et V continue en 0, donc $B = 0$.

Donc : $V(z > 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z$, et $V(z < 0) = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z$.

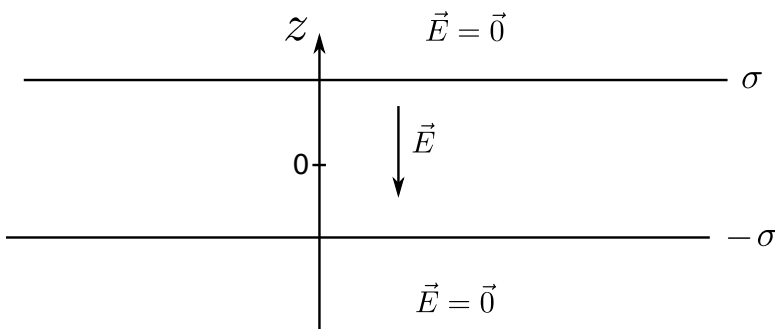
5.



6. On utilise le théorème de superposition : le champ électrique total est la somme du champ créé par le plan chargé à $+\sigma$, donc $\vec{E}_1 = \pm\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z$ selon que l'on est au-dessus/au-dessous de ce plan, et de celui chargé à $-\sigma$, donc $\vec{E}_2 = \pm\frac{-\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z$ selon que l'on est au-dessus/au-dessous de ce plan.

Il y a trois zones :

- Si $z > e/2$, on a $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0}$.
- Si $-e/2 < z < e/2$, on a $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{u}_z$.
- Si $z < -e/2$, on a $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0}$.



7. ★ Pour $z \in [-e/2, e/2]$ on a $-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, donc $\frac{dV}{dz} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

En intégrant on obtient $V(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} z + A$ avec A une constante.

On veut $V(z=0) = 0$, d'où $A = 0$.

On a donc $V(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} z$.

★ On a $U = V(z=e/2) - V(z=-e/2) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} e$, soit $U = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}$.

★ On a $\|\vec{E}\| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{U}{e}$.

8. $\|\vec{E}\| = \frac{U}{e} = \frac{10 \text{ V}}{10 \times 10^{-6} \text{ m}} = 10^6 \text{ V/m}$. Si le champ électrique est trop important et dépasse une valeur critique, alors le milieu entre les plaques devient conducteur. Il y a une ou des étincelles. Le condensateur ne se comporte alors plus correctement, et peut même être endommagé. Dans l'air cette valeur limite est de l'ordre de $3.6 \times 10^6 \text{ V/m}$ pour de l'air sec, moins pour de l'air humide. On est donc ici à la limite. En pratique, on peut remplacer l'air entre les armatures par un liquide diélectrique qui possède une valeur limite plus élevée.

9. On a la relation $\sigma = \frac{Q}{S}$.

Donc $U = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0} = \frac{Qe}{\varepsilon_0 S}$.

La capacité C du condensateur peut être définie via la relation $U = \frac{Q}{C}$.

On a donc $C = \frac{Q}{U}$, soit donc $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$.

Avec les données de l'énoncé on obtient $C \simeq 0.1 \text{ nF}$.

10. On a $w_e = \frac{\varepsilon_0 \|\vec{E}\|^2}{2}$ pour la densité volumique d'énergie électrique.

On remplace également $\|\vec{E}\|$ par $\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$.

On a donc $w_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0^2 S^2}$, soit $w_e = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2}$.

11. L'équation de Maxwell-Ampère est $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Dans l'espace entre les armatures, on a $\vec{j} = \vec{0}$.

Mais si Q dépend du temps, alors $\vec{E} = -\frac{Q}{\varepsilon_0 S} \vec{u}_z$ également, donc $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ n'est pas nul, donc il existe un champ magnétique non nul.

12. Soit S_r la surface d'un disque de rayon r perpendiculaire à l'axe Oz , dont le centre est à l'altitude z . On oriente sa normale selon $+\vec{u}_z$. On a alors

$$\iint_{S_r} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = \oint_{C_r} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl},$$

où C_r est le périmètre de ce disque, orienté selon la règle de la main droite, donc selon $+\vec{u}_\theta$.

On a d'une part :

$$\begin{aligned} \iint_{S_r} \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot \vec{dS} &= \iint_{S_r} \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{dS} \\ &= \iint_{S_r} -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z \\ &= -\frac{\mu_0}{S} \frac{dQ}{dt} \iint_{S_r} dS \\ &= -\frac{\mu_0 \pi r^2}{S} \frac{dQ}{dt}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \oint_{C_r} \vec{B} \cdot \vec{dl} &= \oint_{C_r} B(r, z) \vec{u}_\theta \cdot dl \vec{u}_\theta \\ &= B(r, z) \oint_{C_r} dl \\ &= B(r, z) \times 2\pi r. \end{aligned}$$

On a donc

$$2\pi r B(r, z) = -\frac{\mu_0 \pi r^2}{S} \frac{dQ}{dt}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{B(r, z) = -\frac{\mu_0 r}{2S} \frac{dQ}{dt}}.$$

13. La densité volumique d'énergie magnétique est $w_m = \frac{\|\vec{B}\|^2}{2\mu_0}$.

On a donc ici $\boxed{w_m = \frac{\mu_0 r^2}{8S^2} \left(\frac{dQ}{dt}\right)^2}$.

14. La condition $w_m \ll w_e$ est équivalente à $\frac{\mu_0 r^2}{8S^2} \left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 \ll \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2}$.

Or on a $\frac{dQ}{dt} \simeq \omega Q$ en termes d'amplitude. La condition s'écrit donc $\frac{r^2 \omega^2}{4} \ll \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$.

On utilise ensuite $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, et le fait que r^2 vaut au maximum S/π . La condition est donc finalement $\frac{S\omega^2}{4\pi} \ll c^2$, soit encore $\boxed{\omega \ll 2\sqrt{\pi} \frac{c}{\sqrt{S}}}$.

15. En terme de fréquences ceci devient $f \ll \frac{c}{\sqrt{S}\sqrt{\pi}}$.

On peut oublier le $\sqrt{\pi}$ puisqu'il s'agit d'ordres de grandeur. On doit donc avoir $\boxed{f \ll 3 \times 10^{10} \text{ Hz} = 30 \text{ GHz}}$.

En pratique pour un microphone les fréquences maximales sont de quelques dizaines de milliers de Hertz car les sons audibles par l'homme vont jusqu'à environs 20 kHz.

Les effets magnétiques sont donc bien négligeables.

16. On a la relation $i = C \frac{du}{dt}$ en convention récepteur (faire un schéma habituel en électronique, avec le courant et la tension dans des sens opposés).

La puissance électrique est $\mathcal{P} = ui$. Donc on a

$$\mathcal{P} = C \frac{du}{dt} \times i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u^2 \right).$$

17. ★ L'énergie électrique totale vérifie $\mathcal{P} = \frac{dW_{e,\text{tot}}}{dt}$.

Donc d'après l'expression précédente de \mathcal{P} , on en déduit que $\boxed{W_{e,\text{tot}} = \frac{1}{2} C u^2}$.

★ On peut ensuite utiliser $u = \frac{Q}{C}$ et $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$: $W_{e,\text{tot}} = \frac{Q^2 e}{2\epsilon_0 S}$.

Enfin, on utilise le fait que $W_{e,\text{tot}} = w_e \times eS$ car eS est le volume du condensateur (seul endroit où le champ électrique créé par le condensateur est non nul).

On en déduit $w_e = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S^2}$, comme déjà trouvé précédemment.

18. ★ On utilise l'expression $W_{e,\text{tot}} = \frac{Q^2 e}{2\epsilon_0 S}$ (cf question précédente).

Si e varie de de , à Q constante, alors $W_{e,\text{tot}}$ varie de $dW_{e,\text{tot}} = \frac{Q^2 de}{2\epsilon_0 S}$.

★ Le travail fourni par l'opérateur extérieur pour faire passer l'épaisseur de e à $(e + de)$ s'exprime comme Fde . On a ainsi $Fde = dW_{e,\text{tot}}$, et on en déduit $F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}$.

★ Ceci donne donc également la force exercée par une armature sur l'autre, car la force de l'opérateur lutte justement contre cette force là.

On a donc $F_a = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}$. Cette force est attractive (les armatures sont attirées l'une vers l'autre, car chargées avec des signes opposés).

19. D'après la première partie, $\vec{E}_i = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z = -\frac{Q}{2\epsilon_0 S} \vec{u}_z$.

La force exercée par l'armature inférieure sur une surface élémentaire dS de l'armature supérieure est alors donnée par $d\vec{F}_a = \vec{E}_i \sigma dS$.

La force totale exercée par l'armature inférieure sur l'armature supérieure est donc $\vec{F}_a = \vec{E}_i \sigma S = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \vec{u}_z$.

C'est bien de même norme et de même sens que ce qui a été trouvé précédemment.

I.2 – Deuxième partie : Microphone électrostatique

L'idée générale est d'utiliser un condensateur alimenté par un générateur de tension V_0 constant. Une variation de pression $p(t)$ va entraîner un déplacement $y(t)$ de l'armature gauche : il va falloir trouver une équation liant ces deux grandeurs, ce sera l'équation (1), équation mécanique. On verra que la charge $q(t)$ intervient dans cette équation à cause de la force électrostatique entre les deux armatures. Ensuite, une variation de $y(t)$ entraîne une variation de C (via l'expression qui donne C déjà démontrée dans le cadre du modèle de la partie I.1), puis une variation de C entraîne un courant : schématiquement $Q = V_0 C$ donc $i = \dot{Q} = V_0 \dot{C}$, mais il faudra établir une équation électrique plus précise qui prend en compte la résistance R du circuit, ce sera l'équation (2). Le couplage des équations (1) et (2) et un passage en complexes permettra ensuite d'avoir le lien entre $p(t)$ et $i(t)$.

20. ★ D'après la partie précédente (ou le résultat rappelé en début de cette partie), on a $\vec{F}_e = \frac{Q(t)^2}{2\epsilon_0 S} \vec{u}_y$ avec un signe + car la force entre les électrodes est attractive.

★ On a $Q(t)^2 = (Q_0 + q(t))^2 = Q_0^2 + 2Q_0 q(t) + q(t)^2$, et on néglige le dernier terme devant les deux autres.

On obtient alors $\vec{F}_e = \frac{Q_0^2}{2\epsilon_0 S} \vec{u}_y + \frac{Q_0 q(t)}{\epsilon_0 S} \vec{u}_y$.

★ La composante variable est donc $\vec{f}_e(t) = \frac{Q_0 q(t)}{\epsilon_0 S} \vec{u}_y$.

On ne considère plus la composante non variable dans la suite, car elle est compensée par un dispositif qui maintient l'armature de gauche en place lorsque le condensateur est au repos ($y = 0$ et $q = 0$).

21. Il s'agit d'une force de pression : $\vec{f}_p(t) = P_T S \vec{u}_y - P_a S \vec{u}_y$, avec $P_T = P_a + p(t)$.

$$\text{D'où } \boxed{\vec{f}_p(t) = p(t) S \vec{u}_y.}$$

22. On applique le principe fondamental de la dynamique à l'armature de gauche, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, projeté sur l'axe Oy :

$$\boxed{m\ddot{y} = -ky - a\dot{y} + p(t)S + \frac{Q_0 q(t)}{\epsilon_0 S}.} \quad (1)$$

Cette équation est l'équation mécanique du système.

23. ★ Lorsque $i = 0$, la tension Ri aux bornes de la résistance est nulle. La tension u aux bornes du condensateur est donc V_0 . On a donc $V_0 = \frac{Q_0}{C} = \frac{Q_0}{\epsilon_0 S / e}$, d'où $\boxed{V_0 = \frac{Q_0 e}{\epsilon_0 S}.}$

★ De manière générale, la capacité C est donnée par $\boxed{C = \frac{\epsilon_0 S}{e - y(t)}}.$

24. ★ On a $i(t) = \frac{dQ}{dt}$, et $Q = Q_0 + q(t)$, donc $\boxed{i(t) = \dot{q}.}$

★ La loi des mailles appliquée au circuit ci-dessus donne $V_0 = Ri(t) + \frac{Q}{C}$.

En utilisant les expressions précédentes : $\boxed{V_0 = R\dot{q} + \frac{(Q_0 + q(t))(e - y(t))}{\epsilon_0 S}.}$

25. Dans l'expression ci-dessus on développe le produit $(Q_0 + q(t))(e - y(t))$, et on néglige le terme qy devant chacun des autres termes car c'est le seul terme d'ordre 2. On a donc

$$\begin{aligned} V_0 &= Ri + \frac{Q_0 e - Q_0 y + qe}{\epsilon_0 S} \\ V_0 &= Ri + \frac{Q_0 e}{\epsilon_0 S} - \frac{Q_0 y}{\epsilon_0 S} + \frac{qe}{\epsilon_0 S} \end{aligned}$$

Or d'après une question précédente, $V_0 = \frac{Q_0 e}{\epsilon_0 S}$, ce qui simplifie deux termes.

On remplace aussi $q(t)$ par $\int i(t) dt$ car $i = \dot{q}$. On arrive bien à

$$\boxed{\frac{Q_0}{\epsilon_0 S} y(t) = Ri(t) + \frac{1}{C_0} \int i(t) dt.} \quad (2)$$

Cette équation est l'équation électrique du système.

26. On rappelle que dériver revient à multiplier par $j\omega$, et intégrer à diviser par $j\omega$. On a donc par exemple $\underline{\dot{q}} = (j\omega)\underline{q}$.

L'équation (1) en notation complexe est donc

$$\begin{aligned} m(j\omega)^2 \underline{y} &= -k\underline{y} - a(j\omega)\underline{y} + \underline{p}S + \frac{Q_0}{\epsilon_0 S} \frac{\underline{\dot{q}}}{(j\omega)} \\ (aj\omega - m\omega^2 + k) \underline{y} &= \underline{p}S + \frac{Q_0}{\epsilon_0 S} \frac{\underline{\dot{q}}}{(j\omega)} \\ j\omega \left(a + j \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) \right) \underline{y} &= \underline{p}S + \frac{Q_0}{\epsilon_0 S} \frac{\underline{\dot{q}}}{(j\omega)} \\ \underline{Z}_m \underline{y} &= \frac{S}{j\omega} \underline{p} + \frac{Q_0}{\epsilon_0 S (j\omega)^2} \underline{\dot{q}}, \end{aligned}$$

avec $\underline{Z}_m = a + j \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right)$.

27. L'équation (2) en notation complexe est

$$\begin{aligned}\frac{Q_0}{\varepsilon_0 S} \underline{y} &= R \underline{i} + \frac{1}{C_0(j\omega)} \underline{i} \\ \underline{y} &= \frac{\varepsilon_0 S}{Q_0} \left(R + \frac{1}{jC_0\omega} \right) \underline{i} \\ \underline{y} &= \underline{A} \underline{i} \quad \text{avec} \quad \underline{A} = \frac{\varepsilon_0 S}{Q_0} \underline{Z}_e,\end{aligned}$$

$$\text{avec } \underline{Z}_e = \left(R + \frac{1}{jC_0\omega} \right).$$

28. On reprend l'équation (1) complexe et on y remplace \underline{y} par $\underline{A} \underline{i}$:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_m \underline{A} \underline{i} &= \frac{S}{j\omega} \underline{p} + \frac{Q_0}{\varepsilon_0 S (j\omega)^2} \underline{i} \\ \underline{i} &= \frac{S}{j\omega \left(\underline{Z}_m \underline{A} - \frac{Q_0}{\varepsilon_0 S (j\omega)^2} \right)} \underline{p} \\ \underline{i} &= \frac{S}{\left(j\omega \underline{Z}_m \underline{A} - \frac{Q_0}{\varepsilon_0 S j\omega} \right)} \underline{p} \\ \underline{i} &= \frac{S}{\left(j\omega \underline{Z}_m \frac{\varepsilon_0 S}{Q_0} \underline{Z}_e - \frac{Q_0}{\varepsilon_0 S j\omega} \right)} \underline{p} \\ \underline{i} &= \frac{S}{\frac{\varepsilon_0 S}{Q_0} \left(j\omega \underline{Z}_m \underline{Z}_e - \left(\frac{Q_0}{\varepsilon_0 S} \right)^2 \frac{1}{j\omega} \right)} \underline{p}\end{aligned}$$

Enfin, on se souvient que $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$ dans le condensateur, donc pour le condensateur au repos $E_0 = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 S}$. On a donc bien finalement

$$\underline{i} = \frac{S E_0}{\left(j\omega \underline{Z}_m \underline{Z}_e - \frac{E_0^2}{j\omega} \right)} \underline{p} = \underline{B} \underline{p}$$

avec \underline{B} bien donné comme dans l'énoncé.

29. L'amplitude de $i(t)$ est donnée par $|\underline{i}| = |\underline{B}| |\underline{p}|$, et $|\underline{B}|$ dépend de la fréquence, donc l'amplitude de $i(t)$ également.

Avec les ordres de grandeurs de l'énoncé, on a $\underline{Z}_e \simeq R$, $\underline{Z}_m \simeq -jk/\omega$, et donc $j\omega \underline{Z}_m \underline{Z}_e \simeq kR$, ce qui est très grand devant E_0^2/ω encore d'après l'énoncé.

D'où finalement $\underline{B} \simeq \frac{S E_0}{kR}$. On a alors une fonction de transfert $\underline{B} = \frac{\underline{i}}{\underline{p}}$ qui ne dépend plus de la fréquence. Toutes les fréquences sont ainsi converties en courant avec la même amplitude et la même phase à l'origine, c'est-à-dire que le signal n'est pas déformé.

Problème II - Autour de l'aluminium

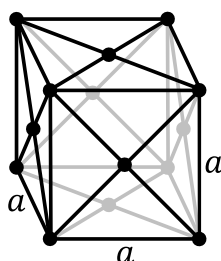
D'après CCP TSI chimie 2014

L'élément aluminium

- 1 - a - Le numéro atomique d'un élément correspond au nombre de protons contenus dans le noyau. Il est noté Z .
- b - $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$
Les sous-couches de valence sont celles de plus grand n (et $n - 1$ pour les sous-couches d). Ici ce sont donc celles où $n = 3$, donc $3s^2 3p^1$.
Les sous-couches de cœur sont les autres : $1s^2 2s^2 2p^6$.
- c - L'atome va tendre à se ramener à la configuration électronique du gaz rare le plus proche. Dit autrement, il est plus stable si ses couches sont toutes pleines. Ici ceci est réalisé pour la configuration $1s^2 2s^2 2p^6 3s^0 3p^0$, ce qui correspond à perdre 3 électrons, donc à l'ion Al^{3+} .

L'aluminium comme matériau léger

2 - a -



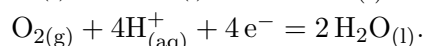
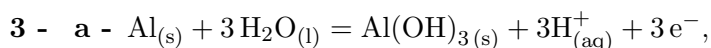
- b - Nombre d'atomes en propre dans une maille élémentaire : $N = 6 \times \frac{1}{2} + 8 \times \frac{1}{8} = 4$.

$$\text{Masse d'un atome d'aluminium : } m = \frac{M_{Al}}{N_A}$$

$$\text{Masse volumique : } \rho = \frac{4m}{a^3}$$

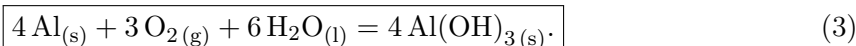
Ceci est plus de deux fois inférieur à la masse volumique de l'acier. Utiliser l'aluminium permet donc un gain de masse, et donc une consommation de carburant moins importante.

L'aluminium comme source d'énergie



On fait ensuite la somme de 4 fois la première et 3 fois la seconde (pour éliminer les électrons).

On obtient bien :



- b - On suppose ici que l'aluminium est le réactif limitant. Soit n_0 la quantité initiale de $Al_{(s)}$. Après un avancement ξ , la quantité de matière de $Al_{(s)}$ est $n = n_0 - 4\xi$. L'avancement maximal est la valeur de ξ telle que tout $Al_{(s)}$ est consommé, donc $\xi_{\max} = n_0/4$.

$$\text{On calcule ensuite } n_0 = \frac{m_{Al}}{M_{Al}} = 1.0 \text{ mol.}$$

$$\text{On a donc } \boxed{\xi_{\max} = n_0/4 = 0.25 \text{ mol.}}$$

- c - (i) On a la relation $Q = I \times \Delta t$. La durée de fonctionnement est donc $\boxed{\Delta t = \frac{Q}{I} = 3.3 \times 10^4 \text{ s.}}$

(ii) On a écrit la réaction bilan en impliquant $3 \times 4 = 12$ électrons échangés. Soit ξ_f l'avancement final. On a donc échangé $12 \times \xi_f$ moles d'électrons. Or la charge d'une mole d'électrons est donnée par la constante de Faraday F . On a donc la relation $Q = 12\xi_f F$,

$$\text{soit } \boxed{\xi_f = \frac{Q}{12F} = 0.16 \text{ mol.}}$$

(iii) La quantité de matière d'aluminium consommé est $n = 4\xi_f$ (faire un tableau d'avancement si besoin), donc $n = 0.66 \text{ mol.}$

L'aluminium dans les vaccins

4 - a - ★ On utilise le fait que le n.o. de l'oxygène est -II, celui de H est +I, et la somme des n.o. des éléments de l'espèce chimique est égale à sa charge électrique totale. On trouve alors :

– $\text{Al}_{(s)}$: nombre d'oxydation nul.

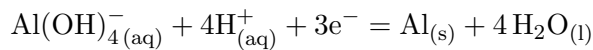
– $\text{Al}(\text{OH})_{3(s)}$, $\text{Al}_{(aq)}^{3+}$, $\text{Al}(\text{OH})_{4(aq)}^-$: nombre d'oxydation de +III.

★ On sait alors que $\text{Al}_{(s)}$ est en bas, et que les trois autres espèces chimiques sont en haut. Pour ces trois dernières, il faut déterminer leur position horizontale. On est en présence de couples acide/base : $\text{Al}_{(aq)}^{3+}/\text{Al}(\text{OH})_{3(s)}$ et $\text{Al}(\text{OH})_{3(s)}/\text{Al}(\text{OH})_{4(aq)}^-$ (on repère la base comme celle portant le plus de OH, ou dans le doute on peut écrire l'équation acide-base du couple sous la forme $\text{AH} = \text{A}^- + \text{H}^+$, avec donc AH l'acide et A^- la base).

Les acides sont à bas pH, les bases à haut pH. On a donc, de gauche à droite : $\text{Al}_{(aq)}^{3+}$, $\text{Al}(\text{OH})_{3(s)}$, $\text{Al}(\text{OH})_{4(aq)}^-$.

b - Il s'agit d'une frontière redox pour le couple $\text{Al}(\text{OH})_{4(aq)}^-/\text{Al}_{(s)}$.

On écrit la demi-équation correspondante :



On écrit la formule de Nernst (en oubliant les concentrations de référence c^0) :

$$\begin{aligned} E &= E_{\text{Al}(\text{OH})_{4(aq)}^-/\text{Al}}^0 + \frac{0.06}{3} \log ([\text{H}^+]^4[\text{Al}(\text{OH})_{4(aq)}^-]) \\ &= E_{\text{Al}(\text{OH})_{4(aq)}^-/\text{Al}}^0 + \frac{4 \times 0.06}{3} \log[\text{H}^+] + \frac{0.06}{3} \log c_T \\ &= E_{\text{Al}(\text{OH})_{4(aq)}^-/\text{Al}}^0 - \frac{4 \times 0.06}{3} \text{pH} + \frac{0.06}{3} \log c_T. \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que sur la frontière, $[\text{Al}(\text{OH})_{4(aq)}^-] = c_T$ concentration de tracé, et la définition $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$.

Or $4 \times 0.06/3 = 0.08$. La pente est donc de -0.08 V/u.pH.

5 - a - Les espèces $\text{H}_2\text{CO}_{3(aq)}$ et $\text{HCO}_{3(aq)}^-$ sont des bases correspondant au dioxyde de carbone CO_2 . On peut donc imaginer qu'elles proviennent de la production de CO_2 par les muscles.

b - On utilise $\text{pH} = \text{pKa} + \log \frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]}$: $\text{pH} = \text{pKa} + \log \frac{[\text{HCO}_{3(aq)}^-]}{[\text{H}_2\text{CO}_{3(aq)}]} = 7.5$.

c - D'après le diagramme E-pH, la forme prédominante de l'aluminium III dans le vaccin (de pH voisin de 7.5) est $\text{Al}(\text{OH})_{3(s)}$.

Titrage d'une solution d'aluminium

Titration d'une solution d'acide chlorhydrique (titrage 1)

6 - a - Réaction de titrage : $\text{H}_3\text{O}_{(aq)}^+ + \text{HO}_{(aq)}^- = 2\text{H}_2\text{O}_{(l)}$

À l'équilibre, $K^0 = Q_r = \frac{1}{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{HO}^-]} = \frac{1}{K_e} = 1.0 \times 10^{14}$.

b - On utilise la méthode des tangentes parallèles. On trouve $V_e = 10.0 \text{ mL.}$

c - À l'équivalence, les réactifs sont introduits en proportions stœchiométriques :

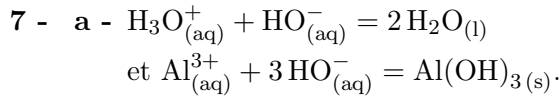
$n_{\text{HO}^- \text{ versé}} = n_{\text{H}_3\text{O}^+ \text{ initial}}$, soit : $C V_e = C_1 V_0$.

On a donc $C_1 = \frac{C V_e}{V_0} = 5.0 \times 10^{-2} \text{ mol/L.}$

d - La zone de virage doit comprendre le pH à l'équivalence (qui est 7 ici). Donc le bleu de bromothymol convient.

Il passe de jaune (milieu acide au départ) à bleu (milieu basique après l'équivalence).

Titration d'une solution acidifiée d'ions $\text{Al}_{(\text{aq})}^{3+}$ (titrage 2)



On relève $V_{e1} = 10 \text{ mL}$, et $V_{e2} = 25 \text{ mL}$.

b - Le premier volume équivalent est le même que celui du titrage 1. Or on a introduit ici la même quantité d'acide chlorhydrique. Ce point correspond donc au titrage des ions $\text{H}_3\text{O}_{(\text{aq})}^+$. Ce sont donc eux qui sont titrés en premier.

c - \star Pour un volume versé entre 0 et V_{e1} , la soude (donc en fait les ions HO^-) réagit avec H_3O^+ .

Ensuite entre V_{e1} et V_{e2} , la soude réagit avec les ions aluminium.

Le volume de soude réagissant avec Al^{3+} est donc $V_{e2} - V_{e1} = 15 \text{ mL}$.

\star On en déduit que la quantité de matière de soude réagissant avec Al^{3+} est $C(V_{e2} - V_{e1})$. À la deuxième équivalence, tous les ions Al^{3+} ont réagi. On a donc proportions stœchiométriques entre Al^{3+} et HO^- :

$$\frac{n_{\text{HO}^- \text{ ayant réagi avec Al}}}{3} = \frac{n_{\text{Al}^{3+} \text{ initial}}}{1}, \text{ soit } \frac{C(V_{e2} - V_{e1})}{3} = C_2 V_0.$$

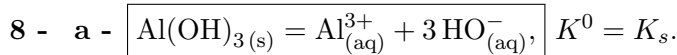
D'où :

$$C_2 = \frac{C(V_{e2} - V_{e1})}{3V_0} = 2.5 \times 10^{-2} \text{ mol/L}.$$

d - Quantité de matière d'ions Al^{3+} dans la fiole : $n = V_0 C_2$.

Ceci correspond à la même quantité de matière de $\text{AlCl}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ initialement introduit.

La masse correspondante est donc $m = V_0 C_2 (M_{\text{Al}} + 3M_{\text{Cl}} + 12M_{\text{H}} + 6M_{\text{O}})$.



b - On lit le pH au point D : $\text{pH}_D = 3.9$.

$$\text{Or } \text{pH} = -\log[\text{H}^+] = -\log \frac{[\text{H}^+][\text{HO}^-]}{[\text{HO}^-]} = -\log \frac{K_e}{[\text{HO}^-]} = \text{p}K_e + \log[\text{HO}^-].$$

$$\text{D'où } \log[\text{HO}^-] = \text{pH} - \text{p}K_e = 4 - 14 = -10, \text{ d'où } [\text{HO}^-] = 10^{-10} \text{ mol/L}.$$

c - Entre le début du dosage et le point D, les ions Al^{3+} n'ont pas encore réagi. Ils ont simplement été dilués.

On a donc :

$$[\text{Al}^{3+}] = C_2 \times \frac{V_0}{V_0 + V_D} = 1.7 \times 10^{-2} \text{ mol/L}.$$

d - Au point D il y a présence du précipité $\text{Al}(\text{OH})_{3(\text{s})}$. La réaction de la question a est donc à l'équilibre, et on peut écrire $K_s = [\text{Al}^{3+}][\text{HO}^-]^3$.

On obtient ainsi $K_s = 1.7 \times 10^{-32}$. (attention toutefois, cette valeur est très approchée à cause des approximations dans les valeurs numériques)