Devoir Surveillé

Physique-chimie – DS 6

Calculatrice interdite

Le sujet comporte deux problèmes indépendants :

- Le problème I étudie un microphone électrostatique basé sur la modification de la capacité d'un condensateur.

  Les parties I.1 et I.2 de ce problème peuvent être traitées indépendamment.
- Le problème II étudie divers rôles de l'aluminium. Il est composé de plusieurs parties qui peuvent être traitées indépendamment (structure électronique, maille, capacité d'une pile, titrages dont le titrage 1 est très simple).

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Instructions générales :

- Toutes les réponses devront être justifiées.
- Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
- Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.
- Les diverses parties sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Il prendra toutefois soin de bien numéroter les questions, et de traiter les questions dans l'ordre au sein d'une même partie.

Problème I – Microphones

Extrait de CCP TSI physique 2011

Le but de ce premier problème est de montrer qu'on peut utiliser un condensateur ou une bobine pour fabriquer un microphone. Un microphone est un transducteur qui transforme un son, c'est-à-dire une onde de pression (donc une onde mécanique), en un signal électrique (tension ou courant) de même forme. Dans les microphones électrostatiques, l'onde de pression, en faisant vibrer l'armature d'un condensateur inclus dans un circuit RC, en modifiera la capacité, ce qui modifiera le courant du circuit. Dans les microphones électrodynamiques, l'onde de pression, en déplaçant une bobine dans un champ magnétique, créera un courant induit. Les courants électriques ainsi générés dans les deux cas, pourront être soit enregistrés soit amplifiés, pour ensuite restituer le son initial par un haut-parleur par un processus inverse. La première partie propose donc de faire l'étude générale d'un condensateur indépendamment de son fonctionnement en microphone, la deuxième partie étudiera le fonctionnement du microphone électrostatique et la troisième partie [non présente dans ce DS 6] étudiera le fonctionnement du microphone électrodynamique.

I.1 – Première partie : Etude d'un condensateur

On se propose de calculer le champ électrique créé par un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique σ. Ce plan correspond au plan (Oxy) d'un système de coordonnées cartésiennes (Ox, Oy, Oz) classique muni d'une base orthonormée $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. La position d'un point M est repérée par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z). On se place tout d'abord dans le cas de l'électrostatique (σ = constante).

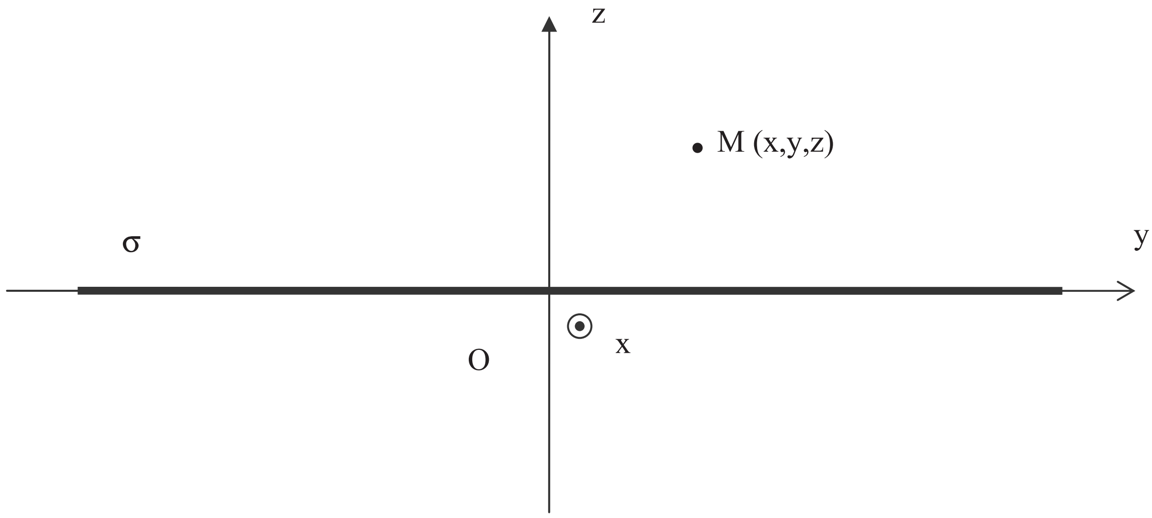


Figure 1 : Plan infini uniformément chargé.

1. Montrer, par des considérations de symétrie, que le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé en M par le plan uniformément chargé est perpendiculaire au plan en tout point de l'espace. On écrira donc $\vec{E}(M) = E(x, y, z)\vec{u}_z$.

   Justifier le fait que le champ électrique $\vec{E}(M)$ ne peut pas dépendre des coordonnées x et y du point M, soit $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$.

   Montrer par des considérations de symétrie que la fonction $E(z)$ est impaire.

2. Montrer, en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss, que le champ est uniforme au dessus et en dessous du plan.

   En appliquant le théorème de Gauss sur une surface qu'on précisera clairement en faisant un schéma, déterminer la valeur du champ électrique en fonction de σ, ε_0 (constante diélectrique du vide) et d'un vecteur unitaire judicieusement choisi qu'on précisera (on distinguera les deux cas : $z > 0$ et $z < 0$). Une démonstration très précise est attendue.

3. Toujours par des considérations de symétrie, déterminer la valeur $E(0)$ du champ électrique dans le plan uniformément chargé.

4. Déterminer le potentiel électrique $V(z)$ en tout point de l'espace en fonction de σ, ε_0 et z (on prendra le potentiel nul en $z = 0$). On distinguera toujours les deux cas : $z > 0$ et $z < 0$. On supposera la continuité du potentiel en $z = 0$.

5. Tracer l'allure des courbes $E(z)$ et $V(z)$ en précisant les valeurs aux points remarquables.

On considère maintenant un condensateur plan infini formé par deux plans infinis et parallèles entre eux, distants de e. Le plan supérieur est situé dans le plan $z = +e/2$ et le plan inférieur dans le plan $z = -e/2$. Le plan supérieur est chargé avec une densité surfacique σ positive et le plan inférieur est chargé avec une densité surfacique opposée (donc négative) $-\sigma$.

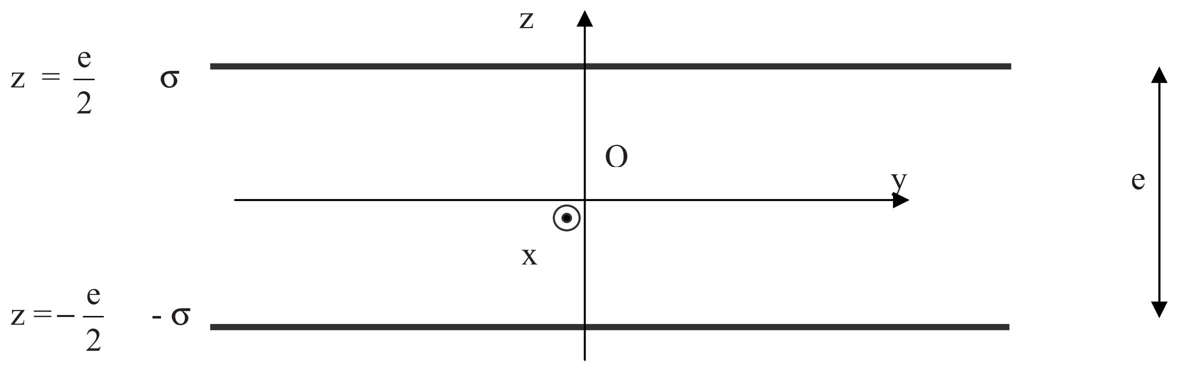


Figure 2 : Condensateur plan infini

6. Déterminer le champ électrique total créé par l'ensemble des deux plans en tout point de l'espace en fonction de σ, ε_0 et d'un vecteur unitaire qu'on précisera (on distinguera les trois zones délimitées par les deux plans). Porter sur un schéma le sens du champ électrique.

7. Calculer l'expression du potentiel électrostatique $V(z)$ pour $z \in [-e/2, e/2]$ en fonction de σ, ε_0 et z. On prendra toujours le potentiel nul en $z = 0$.

   Calculer la différence de potentiel U entre les deux plans infinis en fonction de σ, ε_0 et e.

   Exprimer la norme du champ électrique total en fonction de U et e.

8. Application numérique : les condensateurs des microphones électrostatiques pour la prise de son, sont soumis à des tensions de l'ordre de quelques dizaines de volts et les armatures sont séparées de quelques dizaines de micromètres. Donner l'ordre de grandeur du champ électrique régnant dans ces condensateurs. Quel problème pratique pose un champ électrique trop grand ?

Dans un condensateur réel, les deux armatures ne peuvent pas être des plans infinis mais ont des surfaces finies identiques S. On supposera que les résultats trouvés pour le champ électrique et le potentiel ne diffèrent pas des résultats trouvés dans les questions précédentes, pourvu qu'on ne se place pas trop près des bords des armatures. L'armature supérieure porte alors la charge totale $+Q$ et l'armature inférieure la charge totale $-Q$.

9. Après avoir exprimé σ en fonction de Q et S, en déduire la différence de potentiel U entre les deux armatures en fonction de Q, ε_0, e et S.

   Définir et exprimer la capacité C du condensateur formé en fonction de ε_0, e et S. Donner l'ordre de grandeur de la capacité d'un condensateur utilisé dans un microphone électrostatique pour lequel on prendra : $S \simeq 1\,\text{cm}^2$, $e \simeq 10^{-5}$ m et $\varepsilon_0 \simeq 10^{-11}$ SI.

10. Déterminer la densité volumique w_e d'énergie électrique dans le condensateur en fonction de ε_0, Q et S.

On suppose maintenant que σ et Q dépendent du temps. On admet que cette dépendance est suffisamment lente pour que l'expression du champ électrique déterminée précédemment reste valable.

11. Montrer, en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, qu'il doit nécessairement y avoir un champ magnétique entre les plaques du condensateur.

12. En supposant que les armatures sont des disques, on peut montrer que le champ magnétique est nul au centre O du condensateur et orthoradial ailleurs. On rappelle qu'orthoradial signifie dirigé suivant le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$ des coordonnées cylindriques de centre O et d'axe Oz. On peut également montrer qu'il ne dépend pas de θ. On écrit donc (en coordonnées polaires) $\vec{B} = B(r,z)\vec{u}_\theta$.

Intégrer l'équation de Maxwell-Ampère sur un disque de rayon r perpendiculaire à l'axe Oz et montrer que $B(r,z) = -\dfrac{\mu_0 r}{2S}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide. On justifiera les orientations.

On rappelle le théorème de Stokes-Ampère :

$$\iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \oint_C \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l},$$

où S représente une surface de contour C, tous deux orientés selon la règle de la main droite.

13. En déduire la densité volumique w_m d'énergie magnétique dans le condensateur en fonction de μ_0, Q, r et S.

14. On suppose que la charge Q varie de façon sinusoïdale avec une pulsation ω. A quelle condition reliant ω, c (célérité de la lumière) et S, les effets magnétiques sont-ils négligeables devant les effets électriques dans le condensateur ($w_m \ll w_e$) ?

15. Application numérique : donner l'ordre de grandeur de la plage de fréquence pour laquelle on peut négliger les effets magnétiques devant les effets électriques pour la valeur de S donnée précédemment. Dans les microphones électrostatiques ($S \simeq 1\,\mathrm{cm}^2$), les fréquences maximales sont de quelques dizaines de milliers de Hertz. Pourquoi ? Les effets magnétiques sont-ils alors négligeables ?

16. Donner la relation liant la capacité C d'un condensateur avec le courant i qui le traverse et la tension u à ses bornes. On se placera dans la convention récepteur que l'on définira par un schéma.

Montrer que la puissance électrique mise en jeu dans un condensateur peut alors se mettre sous la forme :

$$\mathcal{P} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu^2\right).$$

17. En déduire l'énergie électrique totale emmagasinée dans un condensateur en fonction de C et u. Exprimer alors cette énergie en fonction de Q, ε_0, e et S. Retrouver alors le résultat trouvé précédemment pour l'expression de w_e.

18. On suppose maintenant qu'un opérateur extérieur exerce perpendiculairement à l'armature supérieure une force F, permettant de faire passer l'épaisseur de e à $(e + \mathrm{d}e)$ à charge constante et sans communiquer d'énergie cinétique. Déterminer la variation d'énergie électrostatique contenue dans le condensateur. On donnera le résultat en fonction de Q, ε_0, S et $\mathrm{d}e$.

En admettant que cette variation d'énergie est égale au travail fourni par l'opérateur extérieur pour faire passer l'épaisseur de e à $(e + \mathrm{d}e)$, en déduire la norme F de la force exercée par l'opérateur en fonction de Q, ε_0, S.

En déduire la norme F_a de la force exercée par une armature sur l'autre en fonction des mêmes paramètres. On placera clairement cette force sur un dessin.

19. On se propose de retrouver ce dernier résultat par un calcul à partir du champ électrique.

Quel est le champ électrique $\vec{E}_i$ créé par l'armature inférieure sur l'armature supérieure ? On exprimera le résultat en fonction de Q, ε_0, S et d'un vecteur unitaire qu'on précisera.

En déduire la force $\vec{F}_a$ exercée par l'armature inférieure sur l'armature supérieure en fonction des mêmes paramètres. Comparer avec le résultat obtenu dans la question précédente.

I.2 – Deuxième partie : Microphone électrostatique

Cette partie peut être traitée indépendamment de la première si on admet que la capacité d'un condensateur plan, dont les armatures ont une surface S et sont séparées par une distance e, est donnée par la formule $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}$ et que la force exercée par une armature sur l'autre est une force attractive qui vaut en norme $F = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$. On peut utiliser un condensateur plan comme microphone (voir figure 3 ci-après). En effet, un son étant une onde de pression, supposons que cette onde de pression arrive sur l'armature gauche du condensateur et provoque un déplacement y de cette armature par rapport à la position dite au repos du condensateur. La distance entre les deux armatures se trouvera modifiée et par voie de conséquence sa capacité. On pourra donc transformer un signal acoustique en un signal électrique en utilisant la variation de la capacité. On supposera que la face gauche de l'armature gauche est soumise à une pression totale $P_T = P_a + p(t)$, P_a représentant la pression atmosphérique et $p(t)$ la surpression acoustique due au son ($p(t)$ positif ou négatif). La face droite de l'armature gauche est soumise à la pression atmosphérique P_a. Sous l'effet de la surpression $p(t)$, l'armature se déplace de $y(t)$ (y positif vers la droite et négatif vers la gauche). En l'absence de surpression acoustique, les deux armatures sont séparées de e (comme dans la première partie), l'armature gauche étant dans un plan vertical passant par l'origine O de l'axe Oy. Chacune des armatures a une surface S comme dans la première partie. L'armature gauche porte une charge $+Q(t)$ et l'armature droite $-Q(t)$. L'armature gauche est rappelée vers sa position d'équilibre $y = 0$ par une force élastique de rappel de type ressort, proportionnelle à l'écart y avec une constante de raideur k, soit en projection sur l'axe Oy : $F_r = -ky$. Le dispositif exerçant cette force n'est pas représenté sur la figure.
Les divers frottements dans l'air introduisent une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ de la forme (toujours en projection sur l'axe Oy) : $F_f = -a\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ (a constante positive). Si le condensateur est polarisé par une tension V_0, toute variation de la capacité entraînera l'apparition d'un courant électrique, ce qui modifiera la charge Q de l'armature. On suppose que lorsque les armatures sont au repos ($y = 0$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$), $Q = Q_0$, $i = 0$, la force exercée par l'armature droite sur l'armature gauche est compensée par un dispositif non représenté. On posera donc lorsque les armatures bougent : $Q(t) = Q_0 + q(t)$ où Q_0 est la charge statique et $q(t)$ la charge induite par le déplacement y de l'armature. On supposera, pour les calculs, que les grandeurs $q(t)/Q_0$ et $y(t)/e$ sont des infiniment petits donc très inférieures à 1.

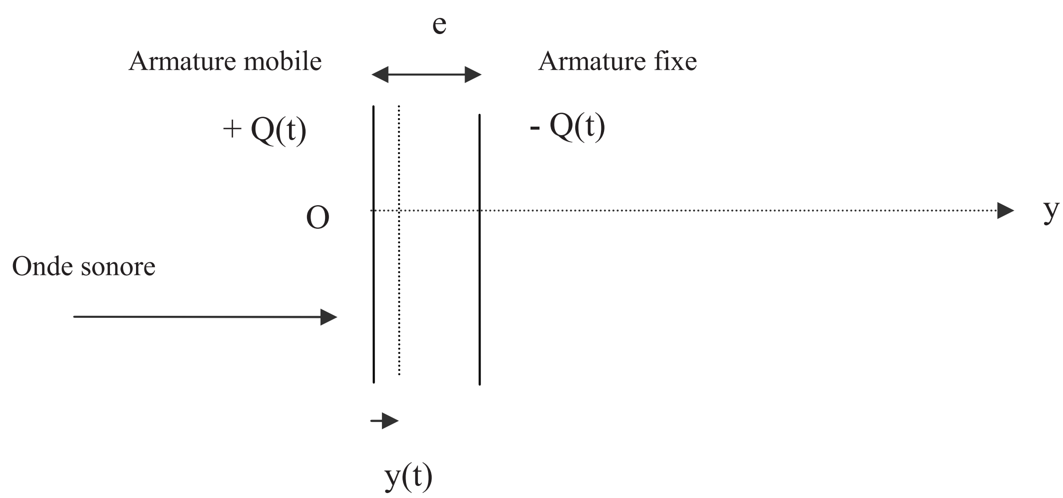


Figure 3 : Microphone électrostatique.

20. Exprimer (sans approximation) la force électrique $\vec{F_e}$ exercée par l'armature droite fixe sur l'armature gauche en mouvement (y différent de 0, i différent de 0) en fonction de Q_0, q, ε_0, S et d'un vecteur unitaire qu'on précisera. Simplifier cette expression en supprimant le terme infiniment petit d'ordre 2 en q (développement limité au premier ordre). Il ne doit plus rester qu'un terme constant et un terme variable proportionnel à q.

Exprimer alors la composante variable $\vec{f_e}(t)$ de la force en fonction de q, Q_0, ε_0, S et d'un vecteur unitaire qu'on précisera. Seule cette dernière composante sera utilisée dans la suite des calculs. Pourquoi ?

21. Quelle est la force totale $\vec{f_p}(t)$ subie par l'armature gauche de la part de l'air situé de part et d'autre ? On donnera le résultat en fonction de $p(t)$ (surpression acoustique), S et d'un vecteur unitaire qu'on précisera.

22. En projetant le principe fondamental de la dynamique sur l'axe horizontal Oy, en déduire l'équation différentielle donnant $y(t)$ en fonction de m (masse d'une armature), k, a, ε_0, S, Q_0, $q(t)$ et $p(t)$. Cette équation sera par la suite notée l'équation (1).

Le condensateur est inclus dans le montage électrique suivant, dans lequel le générateur de tension est parfait, de force électromotrice V_0 constante.

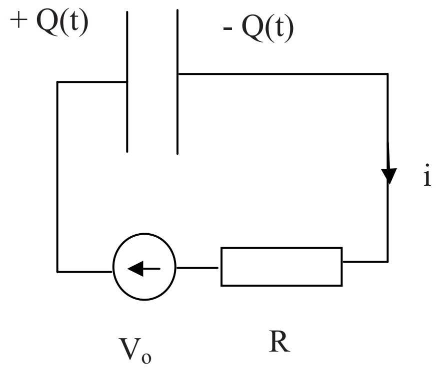


Figure 4 : Circuit électrique du microphone électrostatique.

23. Exprimer V_0 en fonction de Q_0, ε_0, S et e lorsque y et i sont nuls (microphone au repos).

Exprimer, sans approximation, la capacité C du condensateur en fonction de ε_0, S, e et $y(t)$ lorsque le microphone vibre.

24. Quelle relation lie $q(t)$ et $i(t)$? Justifier clairement. En appliquant la loi des mailles, en déduire la relation liant V_0, $i(t)$, R, Q_0, $q(t)$, ε_0, S, e et $y(t)$.

25. En partant de l'équation précédente et en négligeant le terme en qy devant les autres, montrer qu'on obtient :

$$\frac{Q_0}{\varepsilon_0 S} y(t) = Ri(t) + \frac{1}{C_0} \int i(t) \mathrm{d}t,$$

où C_0 représente la capacité du condensateur au repos. Cette équation est notée (2). On détaillera clairement le calcul et les simplifications faites.

On considère maintenant que $p(t)$, $y(t)$ et $i(t)$ sont des fonctions sinusoïdales de pulsation ω. On utilisera à partir de maintenant la notation complexe avec $\mathrm{j}^2 = -1$. À chaque grandeur sinusoïdale $x(t)$, on associera la grandeur complexe $\underline{x}(t)$ telle que $x(t)$ soit la partie réelle de $\underline{x}(t)$.

26. Réécrire l'équation (1) en notation complexe et en déduire une relation liant $\underline{y}(t)$, $\underline{i}(t)$ et $\underline{p}(t)$ et les divers paramètres. On posera $\underline{Z}_m = a + \mathrm{j}\left(m\omega - \dfrac{k}{\omega}\right)$ et on exprimera $\underline{Z}_m \underline{y}(t)$ en fonction de S, ω, Q_0, ε_0, $\underline{p}(t)$ et $\underline{i}(t)$.

27. De même, réécrire l'équation (2) en notation complexe et en déduire que $\underline{y}(t)$ et $\underline{i}(t)$ sont reliées en notation complexe par une relation du type $\underline{y}(t) = \underline{A}\underline{i}(t)$ où $\underline{A}$ est une grandeur complexe qu'on exprimera en fonction de $\underline{Z}_e = \left(R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C_0\omega}\right)$, Q_0, S et ε_0.

28. En déduire, toujours en notation complexe, que $\underline{p}(t)$ et $\underline{i}(t)$ sont liées par une relation du type $\underline{i}(t) = \underline{B}\underline{p}(t)$ avec $B = \dfrac{SE_0}{\mathrm{j}\omega \underline{Z}_e \underline{Z}_m - \dfrac{E_0^2}{\mathrm{j}\omega}}$ où E_0 est la norme du champ électrique dans le condensateur au repos.

29. On a donc fabriqué un transducteur électroacoustique ou microphone puisqu'une surpression $p(t)$ va être transformée en courant électrique de même forme $i(t)$.

L'amplitude du courant dépend-elle de la fréquence ?

On choisira en pratique des valeurs numériques telles que R soit très supérieure à $\dfrac{1}{C_0\omega}$, k très supérieur à $a\omega$ et très supérieur à $m\omega^2$, et kR très supérieur à E_0^2/ω. Quel est l'intérêt d'un tel choix ?

Problème II - Autour de l'aluminium

Extrait de CCP TSI chimie 2014

Données

On fera des applications numériques avec un ou deux chiffres significatifs.

Constantes
On utilisera les valeurs approchées pour les applications numériques.

- Constante d'Avogadro : $N_A = 6.02 \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1} \simeq 6 \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$
- Constante des gaz parfaits : $R = 8.31\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1} \simeq 10\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
- Constante de Faraday : $F = 96500\,\text{C}\cdot\text{mol}^{-1} \simeq 1 \times 10^{5}\,\text{C}\cdot\text{mol}^{-1}$
- Produit ionique de l'eau à 20°C : $K_e = 1.0 \times 10^{-14}$
- On prendra $\dfrac{RT\ln 10}{F} = 0.06\,\text{V/u.pH}$ à toutes les températures considérées.
- $\dfrac{1}{3} \simeq 0.33$, $\dfrac{1}{6} \simeq 0.16$, $\dfrac{5}{3} \simeq 1.66$, $\log 2 \simeq 0.3$, $\dfrac{1}{1730} \simeq 6 \times 10^{-4}$.

Masses molaires
(certaines arrondies)

	H	C	N	O	Al	Si	Cl	Ca
Numéro atomique	1	6	7	8	13	14	17	20
Masse molaire (g/mol)	1	12	14	16	27	28	35.5	40

L'élément aluminium

L'aluminium est l'élément chimique de numéro atomique 13, de symbole Al.

1 - **a -** Que représente le numéro atomique d'un élément ?

b - Donner la configuration électronique de l'atome d'aluminium dans son état fondamental. Identifier les sous-couches de cœur et de valence.

c - Donner, en justifiant, l'ion le plus probable pour l'élément aluminium.

L'aluminium comme matériau léger

L'aluminium est un métal malléable, léger et facile à usiner, ce qui justifie une utilisation répandue dans la construction automobile : jantes, châssis, moteur, carrosserie... Il remplace peu à peu l'acier. Une voiture de gamme moyenne contient entre 120 et 150 kg d'aluminium dans sa structure.
Dans l'aluminium métallique, les atomes d'aluminium sont modélisés par des sphères indéformables. La maille conventionnelle est un cube d'arête $a = 405\,\text{pm}$ où les atomes occupent chaque sommet et le centre de chaque face.

2 - **a -** Dessiner la maille conventionnelle de l'aluminium en précisant clairement la position des atomes.

b - On définit la masse volumique d'un cristal comme le rapport de la masse des atomes en propre à la maille sur le volume de celle-ci. Exprimer la masse volumique de l'aluminium en fonction des données disponibles dans l'énoncé.
L'application numérique donne comme résultat $\rho = 2.70 \times 10^{3}\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. La comparer à celle de l'acier qui vaut $7850\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Conclure.

L'aluminium comme source d'énergie

Depuis quelques années, les piles aluminium/air sont des sources d'énergie à l'étude pour la propulsion de véhicules électriques. Cette technologie repose sur l'association série de plusieurs dizaines de cellules. Chaque cellule peut être décrite de manière simplifiée :

- Le pôle - correspond à l'anode, en aluminium métallique $Al_{(s)}$.
- Le pôle + correspond à la cathode où se produit la réduction du dioxygène $O_{2\,(g)}$.

Un électrolyte basique assure la jonction entre les deux compartiments. La température de fonctionnement est de 60°C. Les couples redox sont les suivants : $Al(OH)_{3\,(s)}/Al_{(s)}$, $O_{2\,(g)}/H_2O_{(l)}$.

3 - a - Écrire la demi-équation correspondant à chacun des couples.
En déduire que la réaction bilan de fonctionnement de la pile peut s'écrire

$$4\,Al_{(s)} + 3\,O_{2\,(g)} + 6\,H_2O_{(l)} = 4\,Al(OH)_{3\,(s)} \qquad (1)$$

b - Le compartiment anodique contient initialement $m = 27\,g$ d'aluminium. Calculer l'avancement maximal de la réaction.

c - En réalité l'avancement maximal n'est pas atteint. En moyenne, une cellule délivre une quantité d'électricité $Q = 2 \times 10^5\,C$ ainsi qu'une intensité de 6 A. En déduire :
(i) la durée de fonctionnement du dispositif,
(ii) l'avancement final de la réaction bilan,
(iii) le nombre de moles d'aluminium consommé.

L'aluminium dans les vaccins

Le diagramme E-pH de l'élément aluminium est tracé sur l'annexe 2 du document réponse (à rendre avec la copie). Il a été établi en tenant compte des espèces $Al(OH)_{3\,(s)}$, $Al_{(s)}$, $Al^{3+}_{(aq)}$, $Al(OH)^-_{4\,(aq)}$. La concentration totale en aluminium dissous est $c_T = 1.0 \times 10^{-3}$ mol/L.

4 - a - Déterminer le nombre d'oxydation de l'élément aluminium dans chacune des espèces chimiques ci-dessus.
Placer ces espèces chimiques dans le diagramme E-pH (annexe 2). On justifiera.

b - Donner la pente théorique de la frontière oblique après le point C.

Un vaccin est une solution aqueuse de pH proche de celui du sang. Le sang est un mélange contenant notamment de l'acide carbonique $H_2CO_{3\,(aq)}$ et des ions hydrogénocarbonates $HCO^-_{3\,(aq)}$ en concentrations moyennes respectives 0.0014 mol/L et 0.028 mol/L.

5 - a - D'où proviennent les espèces carbonées présentes dans le sang ?

b - En considérant le couple $H_2CO_{3\,(aq)}/HCO^-_{3\,(aq)}$, donner une valeur du pH du sang.

c - En déduire la forme prédominante de l'aluminium III dans le vaccin.

Titrage d'une solution d'aluminium

Il est nécessaire de contrôler la concentration en aluminium d'un vaccin. Une méthode possible de titrage de l'aluminium III en solution aqueuse consiste à acidifier la solution à titrer par de l'acide chlorhydrique afin de convertir tout l'aluminium III en ions $Al^{3+}_{(aq)}$. Puis on titre cette solution par de la soude. Les mesures sont réalisées à une température de 298 K.

Titrage d'une solution d'acide chlorhydrique (titrage 1)
Protocole : Un volume $V_0 = 20$ mL d'une solution d'acide chlorhydrique ($H_3O^+_{(aq)}$,$Cl^-_{(aq)}$) de concentration molaire C_1 est titré par une solution de soude ($Na^+_{(aq)}$,$HO^-_{(aq)}$) de concentration $C = 1.0 \times 10^{-1}$ mol/L. Le titrage est suivi par pH-métrie. La courbe est donnée sur le document réponse (annexe 3), à rendre avec la copie.

6 - **a -** Écrire l'équation de réaction mise en jeu lors de ce titrage et calculer la constante d'équilibre associée.

b - À l'aide d'une construction graphique, à faire apparaître sur l'annexe 3, déterminer le volume équivalent V_e.

c - En déduire la valeur de la concentration molaire C_1 de la solution d'acide chlorhydrique.

d - L'équivalence aurait être pu repérée à l'aide d'un indicateur coloré acido-basique. En vous aidant du tableau ci-dessous proposer, en justifiant, un indicateur adapté. Préciser le changement de couleur observé.

Indicateur coloré acido-basique	Couleur de la forme acide	Zone de virage	Couleur de la forme basique
Bleu de bromophénol	Jaune	3,0 - 4,6	Violet
Hélianthine	Rouge	3,1 - 4,4	Jaune
Vert de bromocrésol	Jaune	4,0 - 5,6	Bleu
Bleu de bromothymol	Jaune	6,2 - 7,6	Bleu
Phénolphtaléine	Incolore	8,0 - 10,0	Rouge

Titrage d'une solution acidifiée d'ions $Al^{3+}_{(aq)}$ (titrage 2)

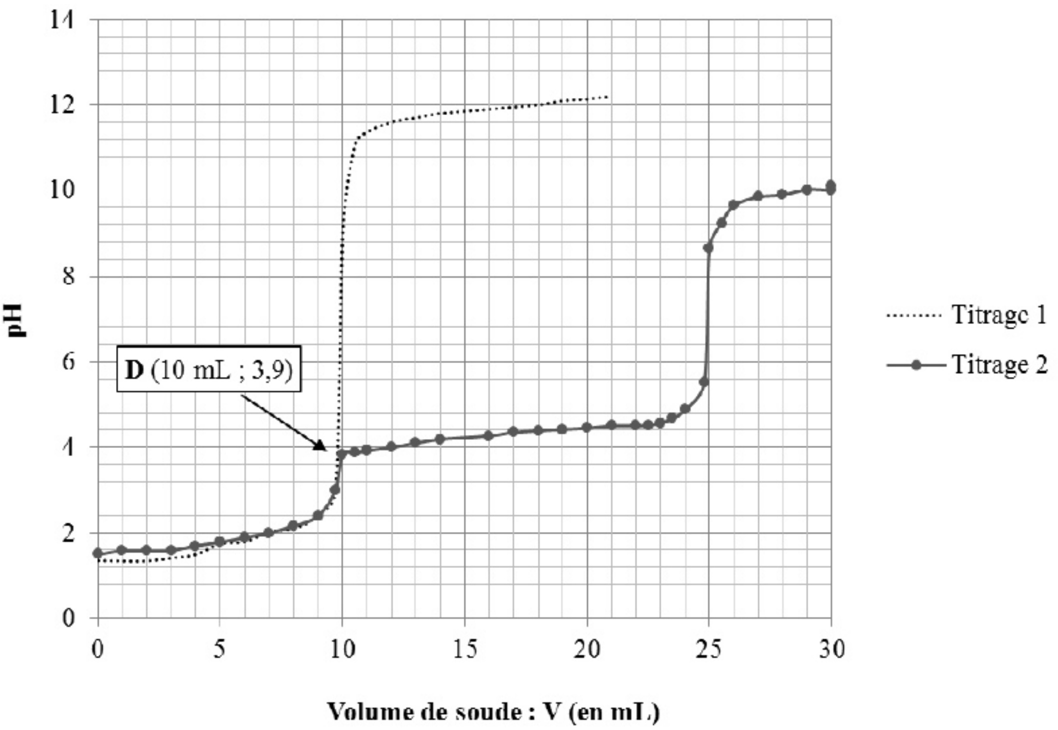
Protocole : Une masse m de chlorure d'aluminium hexahydraté $AlCl_3,6H_2O$ solide, est placé dans une fiole jaugée de volume $V_0 = 20.0\,\text{mL}$. On ajoute un peu de solution d'acide chlorhydrique ($H_3O^+_{(aq)}$,$Cl^-_{(aq)}$) de concentration molaire C_1. On agite jusqu'à dissolution totale du solide, puis on complète avec la même solution d'acide chlorhydrique jusqu'au trait de jauge.
L'équation de réaction de dissolution du solide en milieu acide est la suivante :

$$AlCl_3, 6H_2O_{\,(s)} \quad \rightarrow \quad Al^{3+}_{(aq)} + 3\,Cl^-_{(aq)} + 6\,H_2O_{\,(l)}. \qquad (2)$$

On appellera (S) la solution obtenue. Dans cette solution on notera :

- C_1 la concentration molaire en ions $H_3O^+_{(aq)}$,
- C_2 la concentration molaire en ions $Al^{3+}_{(aq)}$.

Le volume $V_0 = 20.0\,\text{mL}$ de solution (S) est titré par une solution de soude ($Na^+_{(aq)}$,$HO^-_{(aq)}$) de concentration $C = 1.0 \times 10^{-1}\,\text{mol/L}$. Le titrage est suivi par pH-métrie. Au cours du titrage, on remarque l'apparition d'un précipité blanc. On appelle ce titrage le titrage 2. Les courbes des titrages 1 et 2 sont représentées ci-dessous.



Relevé du pH pour les titrages 1 et 2. On arrondira à 4 le pH au point D.

7 - **a -** Écrire les équations des deux réactions mises en jeu lors de ce titrage et relever les valeurs des deux volumes équivalents V_{e1} et V_{e2}.

b - Montrer que les ions $H_3O^+_{(aq)}$ sont dosés en premier.

c - Donner, en mL, le volume de soude qui a réagit avec les cations $Al^{3+}_{(aq)}$. En déduire C_2 la concentration molaire en ions $Al^{3+}_{(aq)}$ dans la solution (S).

d - Quelle masse m de chlorure d'aluminium hexahydraté a servi à la préparation de la solution (S) ? On donnera l'expression sans faire l'application numérique.

Par l'exploitation du point anguleux D, on souhaite retrouver la valeur du produit de solubilité K_s de l'hydroxyde d'aluminium $Al(OH)_{3\,(s)}$.

8 - **a -** Donner l'équation de la réaction dont la constante thermodynamique est le produit de solubilité K_s de l'hydroxyde d'aluminium.

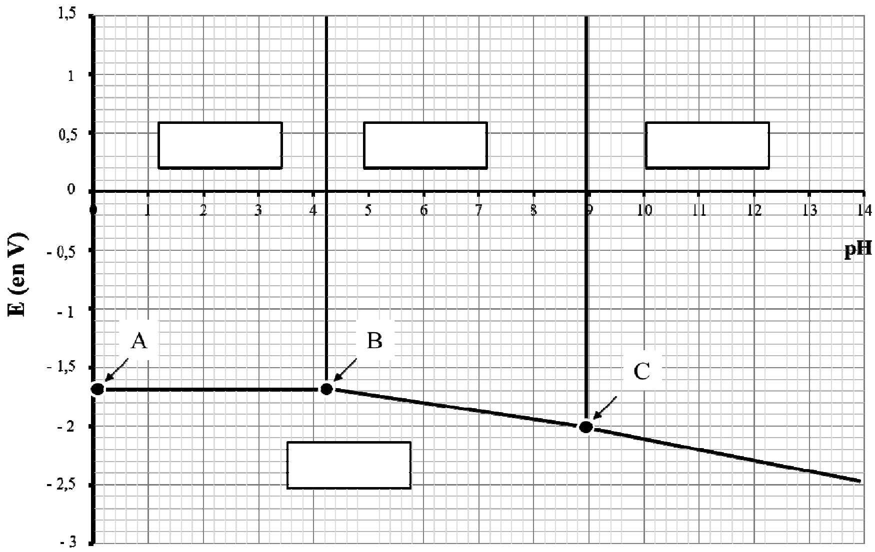
b - Déterminer la concentration molaire en ions $HO^-_{(aq)}$ dans le bécher au point D.

c - En tenant compte de la dilution, évaluer la concentration molaire en ions $Al^{3+}_{(aq)}$ dans le bécher au point D.

d - En déduire une valeur à 298 K du produit de solubilité K_s de l'hydroxyde d'aluminium.

Annexe 2 :

Diagramme E-pH de l'aluminium à 298 K
Concentration de tracé : $C_T = 1{,}0.10^{-3}$ mol.L^{-1}



Coordonnées des points : **A : (0,0 ; - 1,72)** **B : (4,3 ; - 1,72)** **C : (9,0 ; - 2,05)**

Annexe 3 :

Evolution du pH lors du titrage d'une solution d'acide chlorhydrique (C_1) par de la soude (C)