Correction – Oscillateurs électroniques

I Oscillateur électronique

Extrait du sujet de concours PT 2015.

I.1 Étude du bloc 1 filtre

1 – On raisonne d'abord directement sur $\underline{H}$, puis on prendra ensuite le module et on calculera le gain. C'est plus simple que de calculer le gain dans le cas général puis de prendre la limite.

▶ En basse fréquence, on a $x \to 0$, donc $1/x$ tend vers l'infini et devient très grand devant tous les autres termes du dénominateur : on néglige ces derniers et on a $\underline{H} \sim \dfrac{A_0}{-\mathrm{j}Q\frac{1}{x}} = \dfrac{\mathrm{j}A_0 x}{Q}$.

Le gain est donc $G_{\mathrm{dB}} \simeq 20\log\left|\dfrac{\mathrm{j}A_0x}{Q}\right| = 20\log\dfrac{A_0x}{Q}$, soit $\boxed{G_{\mathrm{dB}} \underset{x\to0}{\sim} 20\,\log\dfrac{A_0}{Q} + 20\log x.}$

Dans le diagramme de Bode qui donne G en fonction de $\log x$, l'asymptote est donc une droite de pente $+20$ (on dit aussi que la pente est de $+20$ décibels par décade ou dB/décade) et d'ordonnée à l'origine $20\,\log\dfrac{A_0}{Q} = -48\,\mathrm{dB}$ avec les données de l'énoncé.

▶ En hautes fréquences, on a $x \to +\infty$. Au dénominateur, le terme dominant devient x, et on néglige les autres devant lui. On a donc $\underline{H} \sim \dfrac{A_0}{\mathrm{j}Qx}$.

Le gain est donc : $G_{\mathrm{dB}} \simeq 20\log\left|\dfrac{A_0}{\mathrm{j}Qx}\right| = 20\log\dfrac{A_0}{Qx} = 20\log\dfrac{A_0}{Q} - 20\log x$, soit

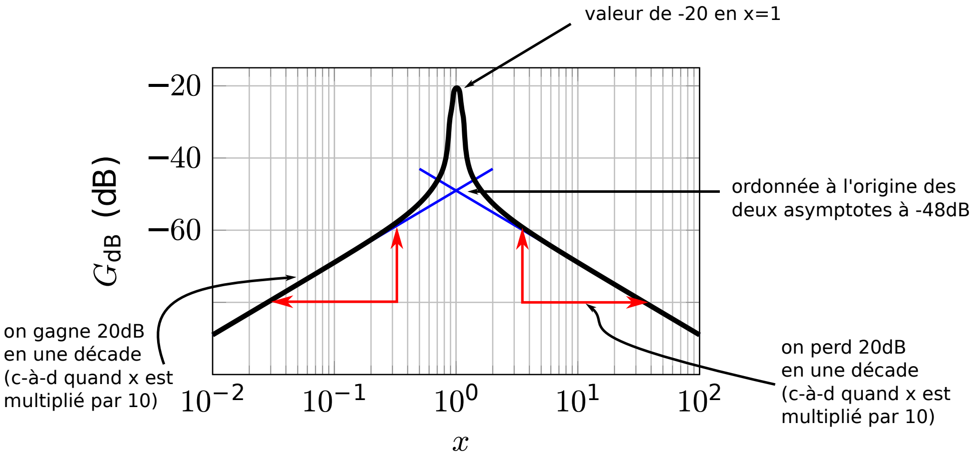
$$\boxed{G_{\mathrm{dB}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 20\,\log\dfrac{A_0}{Q} - 20\log x.}$$

L'asymptote est donc une droite de pente -20 dB/décade et d'ordonnée à l'origine $20\,\log\dfrac{A_0}{Q} = -48\,\mathrm{dB}$.

2 – On veut une représentation schématique (pas un tracé avec un logiciel). On trace donc les deux asymptotes.

On place également le point en $x = 1$ (c'est-à-dire en $\omega = \omega_0$) : on a alors $\underline{H} = A_0$ et donc $G_{\mathrm{dB}} = 20\,\log A_0 = -20$.

Puis on trace approximativement l'allure.



3 – Il s'agit d'un filtre passe-bande, car il coupe à la fois les basses et les hautes fréquences.

4.a – Dans cette question, il faut reprendre le schéma du circuit et calculer $\underline{H} = \underline{u}_2/\underline{u}_1$. Le principe du calcul est simple : on peut appliquer un diviseur de tension entre $\underline{u}_2$ et $\underline{u}_1$, à condition d'assimiler l'ensemble {résistance R + bobine + condensateur} à une seule impédance équivalente $\underline{Z}_{\text{eq}}$.

On a :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\text{j}L\omega} + \frac{1}{1/(\text{j}C\omega)} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\text{j}L\omega} + \text{j}C\omega. \tag{1}$$

Le diviseur de tension donne :

$$\begin{aligned}
\underline{u}_2 &= \underline{u}_1 \times \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{R_0 + \underline{Z}_{\text{eq}}} \\
\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} &= \frac{1}{\frac{R_0}{\underline{Z}_{\text{eq}}} + 1} \\
\underline{H} &= \frac{1}{R_0\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\text{j}L\omega} + \text{j}C\omega\right) + 1}
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{\frac{-\text{j}R_0}{L\omega} + \text{j}R_0C\omega + 1 + \frac{R_0}{R}}} \tag{3}$$

4.b – On veut aboutir à quelque chose de la forme suivante :

$$\underline{H} = \frac{A_0}{1 + \text{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{A_0}{1 + \text{j}Q\left(\sqrt{LC}\omega - \frac{1}{\sqrt{LC}\omega}\right)}$$

car on sait (d'après l'énoncé) que $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Il faut donc d'abord qu'au dénominateur, le coefficient qui n'est ni devant ω ni devant $1/\omega$ soit égal à 1. On divise donc partout notre expression 3 par $1 + \frac{R_0}{R}$:

$$\begin{aligned}
\underline{H} &= \frac{\frac{1}{1+R_0/R}}{\frac{1}{1+R_0/R}\left(\frac{-\text{j}R_0}{L\omega} + \text{j}R_0C\omega\right) + 1} \\
&= \frac{\frac{1}{1+R_0/R}}{\text{j}\,\frac{R_0}{1+R_0/R}\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) + 1}.
\end{aligned} \tag{4}$$

On a donc déjà $\boxed{A_0 = \frac{1}{1 + R_0/R}}$.

Ensuite, on impose par exemple l'égalité du facteur devant ω : on doit avoir $\text{j}Q\sqrt{LC} = \text{j}\frac{R_0C}{1+R_0/R}$, d'où l'on déduit que :

$$\boxed{Q = \sqrt{\frac{C}{L}}\frac{R_0}{1 + R_0/R}.} \tag{5}$$

I.2 Étude du bloc ALI

5 –
- L'ALI possède une unique rétroaction sur la patte -, il fonctionne donc en régime linéaire. De plus, il est supposé idéal. On aura donc $\underline{V}_+ = \underline{V}_-$ et $\underline{i}_+ = \underline{i}_- = 0$.
- On a $\underline{V}_+ = \underline{u}_2$.

  D'autre part, un diviseur de tension (possible car $\underline{i}_- = 0$) indique que $\underline{V}_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\underline{u}_3$.
- On a donc $\underline{u}_2 = \underline{V}_+ = \underline{V}_- = \frac{R_1}{R_1+R_2}\underline{u}_3$, d'où $\boxed{\underline{G} = \frac{\underline{u}_3}{\underline{u}_2} = \frac{R_1+R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}.}$

6 – On a immédiatement $\boxed{K = |\underline{G}| = 1 + \frac{R_2}{R_1}.}$

I.3 Système bouclé

On ferme l'interrupteur, réalisant ainsi un système bouclé.

7 – En bouclant le système, on a alors $\underline{u_1} = \underline{u_3}$. On a donc $\underline{u_3} = \underline{G}\underline{u_2} = \underline{GH}\underline{u_1} = \underline{GH}\underline{u_3}$. On ne simplifie pas par $\underline{u_3}$, puisque l'objectif est de passer dans le domaine temporel. On va donc utiliser la correspondance $\boxed{(\mathrm{j}\omega) \to \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}.}$

Donc $\underline{u_3} = \dfrac{KA_0}{1+\mathrm{j}Q\left(x-\frac{1}{x}\right)}\underline{u_3} \Leftrightarrow \underline{u_3}\left(1+\mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right) = KA_0\,\underline{u_3} \Leftrightarrow \underline{u_3}\left(1+\dfrac{Q\mathrm{j}\omega}{\omega_0}+\dfrac{Q\omega_0}{\mathrm{j}\omega}\right) = KA_0\,\underline{u_3}$. On multiplie tout par $\mathrm{j}\omega$ car on ne veut pas de terme en $1/\mathrm{j}\omega$:

$$\underline{u_3}\left(\mathrm{j}\omega + \frac{Q(\mathrm{j}\omega)^2}{\omega_0} + Q\omega_0\right) = KA_0\,(\mathrm{j}\omega)\underline{u_3}.$$

Ceci donne donc dans le domaine temporel, après réarrangement : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u_3}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}(1-KA_0)\dfrac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2u_3 = 0.}$

Remarque : On est tenté de simplifier par $\underline{u_3}$ dans la relation $\underline{u_3} = \underline{GH}\underline{u_3}$. On obtient alors $\underline{GH} = 1$, ce qui est la condition de Barkhausen, qui indique quand il y a oscillations strictement sinusoïdales. Mais ce n'est pas l'objet de la question.

8.a – $\star$ On a des oscillations (quasi sinusoïdales ou non) dès que le coefficient en facteur de $\dfrac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t}$ est de signe différent des autres termes, donc dès qu'il est négatif, donc dès que $KA_0 > 1$.

$\star$ Pour que les oscillations soient quasi sinusoïdales, il faut que ce terme en facteur de $\dfrac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t}$ soit négatif mais très petit en valeur absolue. Il faut donc $\boxed{KA_0 > 1}$ tout en ayant $\boxed{\dfrac{|1-KA_0|}{Q} \ll 1.}$

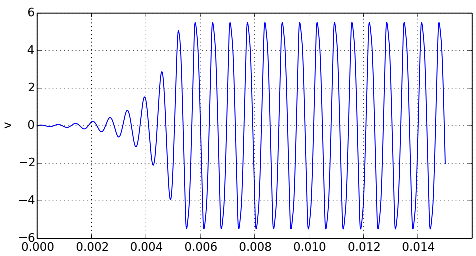
8.b – Lorsque c'est le cas, on peut négliger le terme en $\dfrac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t}$ dans l'équation différentielle, qui devient alors $\dfrac{\mathrm{d}^2u_3}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2u_3 = 0$, dont on sait que les solutions sont sinusoïdales de pulsation ω_0 et donc de fréquence $\boxed{f_0 = \omega_0/(2\pi).}$

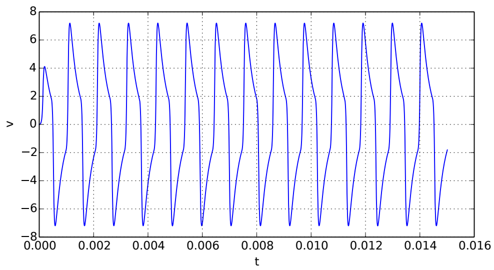
9.a – On a déjà dit que pour que les oscillations démarrent, il faut $\boxed{A_0K > 1.}$

9.b – La solution de l'équation différentielle est alors une fonction sinusoïdale dont l'amplitude croît de façon exponentielle.

10.a – Mais en pratique cette amplitude ne peut pas tendre vers l'infini. Elle se stabilise rapidement à une valeur finie. Ceci est expliqué par le fait que lorsque u_3 dépasse la tension de saturation de l'ALI, celui-ci sature. Les hypothèses qui mènent à l'équation différentielle de la question 4 ne sont alors plus valides. C'est donc la saturation de l'ALI qui explique la stabilisation de l'amplitude des oscillations.

10.b – On a l'allure suivante (soit à gauche si on n'est pas trop loin du seuil, soit à droite si on est loin du seuil) :





I.4 Utilisation du dispositif

11.a – On a $f_{\text{osc}} = \dfrac{D}{\sqrt{C_0(1-\frac{x}{l})}} = \dfrac{D}{\sqrt{C_0}}\left(1-\dfrac{x}{l}\right)^{-1/2}$. On utilise ensuite un développement limité du type $(1+u)^\alpha = 1+\alpha u$, avec ici $u = -x/l$ et $\alpha = -1/2$.

Ici on a donc $f_{\text{osc}} = \dfrac{D}{\sqrt{C_0}}\left(1+\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{l}\right) = ax+b$ avec $\boxed{a = \dfrac{D}{2l\sqrt{C_0}}}$ et $\boxed{b = \dfrac{D}{\sqrt{C_0}}.}$

11.b – On a $\Delta f = f_{\text{osc}} - f_{\text{or}} = ax+b-f_{\text{or}}$. Or f_{or} est la fréquence pour $x=0$, donc on a $f_{\text{or}} = f_{\text{osc}}(0) = b$. On a donc $\Delta f = ax$. Ainsi $\boxed{x_{\min} = \Delta f_{\min}/a = 0.19\,\text{mm}.}$