Partie I : Électronique
Rappels de 1re année

Correction – Systèmes linéaires

$\rightsquigarrow_8$ Donner l'expression de $|z|$ et de $\arg(z)$ en fonction de a et b.

On a :

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}. \tag{1}$$

Pour l'argument, on a à condition que la partie réelle de z soit positive strictement (donc que $a>0$) :

$$\arg(z) = \arctan\frac{b}{a}. \tag{2}$$

En physique on a quasiment toujours $a>0$ et il suffit de retenir la formule ci-dessus. Cela dit, si jamais $a<0$, on a la formule suivante :

$$\arg(z) = \pi + \arctan\frac{b}{a}. \tag{3}$$

On peut en profiter pour rappeler les propriétés suivantes : si z_1 et z_2 sont des complexes, on a

$$\arg(z_1\,z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2). \tag{4}$$

On a aussi $\arg(1)=0$, $\arg(-1)=\pi$, $\arg(\mathrm{j})=\pi/2$, $\arg(-\mathrm{j})=-\pi/2$.

Pour le module :

$$|z_1\,z_2| = |z_1|\times|z_2|, \qquad \textit{et} \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}. \tag{5}$$

$\rightsquigarrow_9$ À haute fréquence, bobine =interrupteur ouvert et condensateur = fil.

$\rightsquigarrow_{10}$ À basse fréquence, bobine =fil et condensateur = interrupteur ouvert.

$\rightsquigarrow_{11}$

1 - Calcul de la fonction de transfert :

On est en RSF, on utilise donc les grandeurs complexes $\underline{s}$, $\underline{e}$, et les impédances $\underline{Z}_C = 1/(\mathrm{j}C\omega)$ pour le condensateur et $\underline{Z}_R = R$ pour la résistance.

On utilise un diviseur de tension :

$$\begin{aligned}
\underline{e} &= \underline{s}\times\frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C+\underline{Z}_R}\\
&= \underline{s}\times\frac{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}}{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}+R}\\
&= \underline{s}\times\frac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega}\\
&= \underline{s}\times\frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}},
\end{aligned} \tag{6}$$

en posant $\omega_0 = 1/(RC)$ (c'est bien homogène car RC est homogène à un temps).

On a donc

$$\underline{H} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}}. \tag{7}$$

2 - Calcul du module et de l'argument :

$$\begin{aligned}
|\underline{H}| &= \frac{|1|}{|1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}|}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}},
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\arg\underline{H} &= \arg(1) - \arg\left(1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}\right) \\ &= 0 - \arctan\frac{\omega}{\omega_0}.\end{aligned} \tag{9}$$

(On peut utiliser la formule avec arctan car la partie réelle du nombre complexe (qui vaut 1 ici) est positive strictement.)

3 - Comportement asymptotique :

Il s'agit d'étudier le comportement du module et de l'argument dans les limites $\omega \to 0$ et $\omega \to +\infty$. Dans ces cas là, il est toujours plus simple d'étudier les limites directement sur $\underline{H}$ (donné par l'équation 7, puis ensuite de prendre le module et l'argument des expressions obtenues.

- Pour $\omega = 0$, on a tout simplement $\underline{H}(\omega = 0) = 1$.

  Donc le module tend vers 1 et l'argument vers $\arg(1) = 0$.

  Le gain en décibel tend vers $G_0 = 20\log|\underline{H}(\omega = 0)| = 20\log(1) = 0$.

- Pour $\omega \to +\infty$ (donc en fait pour $\omega/\omega_0 \gg 1$), on a :

$$\begin{aligned}\underline{H} &= \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}} \\ &\simeq \frac{1}{\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}} \\ &= -\mathrm{j}\frac{\omega_0}{\omega}.\end{aligned} \tag{10}$$

  On a donc $|\underline{H}| \simeq \omega_0/\omega$, et $\arg\underline{H} \simeq \arg(-\mathrm{j}) + \arg(\omega_0/\omega) = -\pi/2 + 0 = -\pi/2$.

  Le gain en décibel vaut $G = 20\log|\underline{H}| = 20\log(\omega_0/\omega) = -20\log\omega + 20\log\omega_0$.

On pouvait prévoir ceci (en partie) avec moins de calcul en disant que à basse fréquence, le condensateur est un interrupteur ouvert, donc on à $s = e$, donc $\underline{H} = 1$; et qu'à hautes fréquences le condensateur est un fil et on a donc $s \to$, d'où $\underline{H} = \underline{s}/\underline{e} \to 0$ (mais on ne peut pas dire que $\underline{H} \to 0$ en étant proportionnel à $1/\omega$).

4 - Diagramme de Bode en gain et en phase :

Il s'agit des graphes de la partie IV.2.2.