Fiche méthode
Mathématiques

Équations différentielles

Correction partiellement rédigée :

$\rightsquigarrow_1$ Pour $t \geq 0$ l'équation est

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau},$$

avec $\tau = RC$.

La solution est $u(t) = A\exp(-t/\tau) + E$. Comme $0 = u(t = 0^-) = u(t = 0^+)$ (continuité de la tension aux bornes d'un condensateur), on en déduit $A = -E$. Finalement, $\boxed{u(t) = E(1 - \exp(-t/\tau))}$.

$\rightsquigarrow_2$ L'équation sur x se réécrit sous la forme $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,}$, avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.
Les solutions sont de la forme $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.

D'après cette expression, on a $x(t = 0) = A$. D'autre part d'après l'énoncé, $x(t = 0) = x_0$. Donc $A = x_0$.

On calcule ensuite $\dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$, d'où $\dot{x}(t = 0) = B\omega_0$. D'autre part, $\dot{x}(t = 0) = 0$ (vitesse initiale nulle d'après l'énoncé). Donc $B = 0$.

On a finalement $\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t)}$.

$\rightsquigarrow_3$ On peut écrire l'équation sous forme canonique puis appliquer le cours (régime pseudo-périodique si $\lambda < \omega_0$). On peut aussi écrire l'équation sous la forme $m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = 0$. Le polynôme caractéristique est $m\,r^2 + f\,r + k$ (on prend r comme variable car x est déjà pris, c'est la position). Son discriminant est

$$\Delta = f^2 - 4mk. \tag{1}$$

On sait que le régime est pseudo-périodique si $\Delta < 0$. Ici, ceci correspond à $\boxed{f < 2\sqrt{mk}}$. La valeur limite de f est donc $2\sqrt{mk}$.

$\rightsquigarrow_4$ Pour $t \geq 0$ l'équation est

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau} = 0,$$

avec $\tau = RC$.

La solution est $u(t) = A\exp(-t/\tau)$. Comme $u_0 = u(t = 0^-) = u(t = 0^+)$ (continuité de la tension aux bornes d'un condensateur), on en déduit $A = E$. Finalement, $\boxed{u(t) = E\exp(-t/\tau)}$.