Fiche méthode
Mathématiques

Équations différentielles

Cette fiche aborde uniquement les équations différentielles *linéaires à coefficients constants* d'ordre 1 et 2. C'est presque toujours ce type d'équations que vous rencontrerez en physique-chimie. Attention toutefois, en mathématiques vous manipulerez régulièrement des équations non linéaires ($y'^2 + y = 0$) ou à coefficients non constants ($y' + t\,y = 0$), et les résultats présentés ici ne s'appliquent pas.

I Cas des systèmes du 1^er^ ordre

Équation	Solution
Équation homogène : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}u = 0}$	$\boxed{u(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$ A est une constante réelle, qui peut être obtenue avec la condition initiale $u(t=0)$.
Équation avec second membre constant : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}u = \dfrac{E}{\tau}}$	$\boxed{u(t) = u_H(t) + u_P(t),}$ avec : ▶ $u_H(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ solution de l'équation homogène, ▶ $u_P = E$ solution particulière de l'équation. Attention : la constante A se détermine avec la solution totale $u(t=0) = A + u_P(t=0)$, et certainement pas avec $u_H(t=0)$.

Voir ce site pour un tableau un peu plus complet, et surtout pour les liens vers des animations de systèmes vérifiant ces équations (charge et décharge de condensateur, etc.) : http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/equadiff/equadif/ordre1.html (le lien est aussi sur le site de la classe, rubrique "chapitres et documents").

II Cas des systèmes du 2^e^ ordre

Remarque générale : les équations du second ordre font intervenir deux constantes d'intégration. Il faut donc deux conditions initiales pour les déterminer, en générale une sur $u(t=0)$ et une sur $u'(t=0)$.

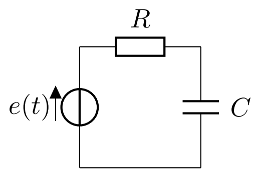
Équation	Solution
Équation de type oscillateur harmonique (donc sans frottement), homogène : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u = 0}$	$\boxed{u(t) = A\,\cos(\omega_0 t) + B\,\sin(\omega_0 t),}$ Détermination de A et B : Supposons que l'on connaisse $u(t=0) = u_0$ et $u'(t=0) = u_1$. On a alors $u_0 = u(t=0) = A$, et pour $u'(t=0)$ il faut d'abord calculer $u'(t) = -A\omega_0\,\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\,\cos(\omega_0 t)$, puis prendre la valeur à $t=0$: $u'(t=0) = B\omega_0$. On a donc $u_1 = B\omega_0$ et donc $B = u_1/\omega_0$. Rq : on peut aussi avoir la solution sous la forme $u(t) = A\,\cos(\omega_0 t + \varphi)$, avec A et φ des constantes à déterminer avec $u(t=0)$ et $u'(t=0)$.
Équation de type oscillateur harmonique (donc sans frottement), avec second membre : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u = \alpha}$	$\boxed{u(t) = u_H(t) + u_P(t),}$ avec : ▶ $u_H(t) = A\,\cos(\omega_0 t) + B\,\sin(\omega_0 t)$ solution de l'équation homogène, ▶ u_P solution particulière de l'équation.

Équation	Solution
Équation avec frottement (terme $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$), homogène : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+2\lambda\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2u=0}$ ou $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2u=0}$	Équation caractéristique : $\boxed{x^2+2\lambda x+\omega_0^2=0}$, de discriminant $\Delta=4(\lambda^2-\omega_0^2)$. Solution : ▶ Si $\lambda>\omega_0$: régime apériodique. Les racines x_1 et x_2 du polynôme sont réelles. On a $u(t)=A\exp(x_1t)+B\exp(x_2t)$. ▶ Si $\lambda=\omega_0$: régime critique. $\Delta=0$ et une seule racine (double) x_1. On a $u(t)=(At+B)\exp(x_1t)$. ▶ Si $\lambda<\omega_0$: régime pseudo-périodique. Les racines x_1 et x_2 du polynôme sont complexes conjugués, $x_1=-\lambda+\mathrm{j}\omega$ et $x_2=-\lambda-\mathrm{j}\omega$ avec $\omega^2=\omega_0^2-\lambda^2$. On a $u(t)=\exp(-\lambda t)\,[A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)]$. Rq 1 : On rappelle que $Q=\omega_0/(2\lambda)$ donne une idée du nombre d'oscillations dans le régime pseudo-périodique. Rq 2 : Pour le régime pseudo-périodique, on peut aussi écrire la solution sous la forme $u(t)=\exp(-\lambda t)\,A\cos(\omega t+\varphi)$.
Équation avec frottement et avec second membre : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+2\lambda\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2u=\alpha}$ ou $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2u=\alpha}$	$\boxed{u(t)=u_H(t)+u_P(t),}$ avec : ▶ $u_H(t)$ solution de l'équation homogène (voir au dessus), ▶ u_P solution particulière de l'équation.

Sur le même site que précédemment, mais pour les systèmes du 2e ordre : http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/equadiff/equadif/ordre2.html (le lien est aussi sur le site de la classe, rubrique "chapitres et documents").

III Exercices pour s'entraîner

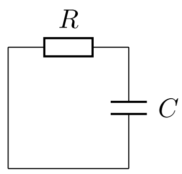
$\rightsquigarrow_1$ On considère le circuit RC série ci-contre. La source de tension délivre une tension nulle pour $t<0$ (et le condensateur est déchargé) et égale à E pour $t\geq 0$. Déterminer la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur.



$\rightsquigarrow_2$ L'équation différentielle régissant les oscillations d'une masse accrochée à un ressort est $m\ddot{x}=-kx$, $k>0$. Écrire les solutions de cette équation, sachant qu'à $t=0$ on a $x=x_0$ et une vitesse nulle.

$\rightsquigarrow_3$ On considère maintenant que la masse oscille dans un milieu où les frottements ne peuvent plus être négligés. On a donc $m\ddot{x}=-kx-f\dot{x}$ avec $k,\ f>0$. Donner l'expression de f à partir de laquelle il n'y aura plus du tout d'oscillations.

$\rightsquigarrow_4$ On considère le circuit RC série ci-contre. À $t=0$ le condensateur est chargé (charge q, on notera $u_0=q/C$). Déterminer la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur.



La correction est sur le site de la classe, rubrique "chapitres et documents".