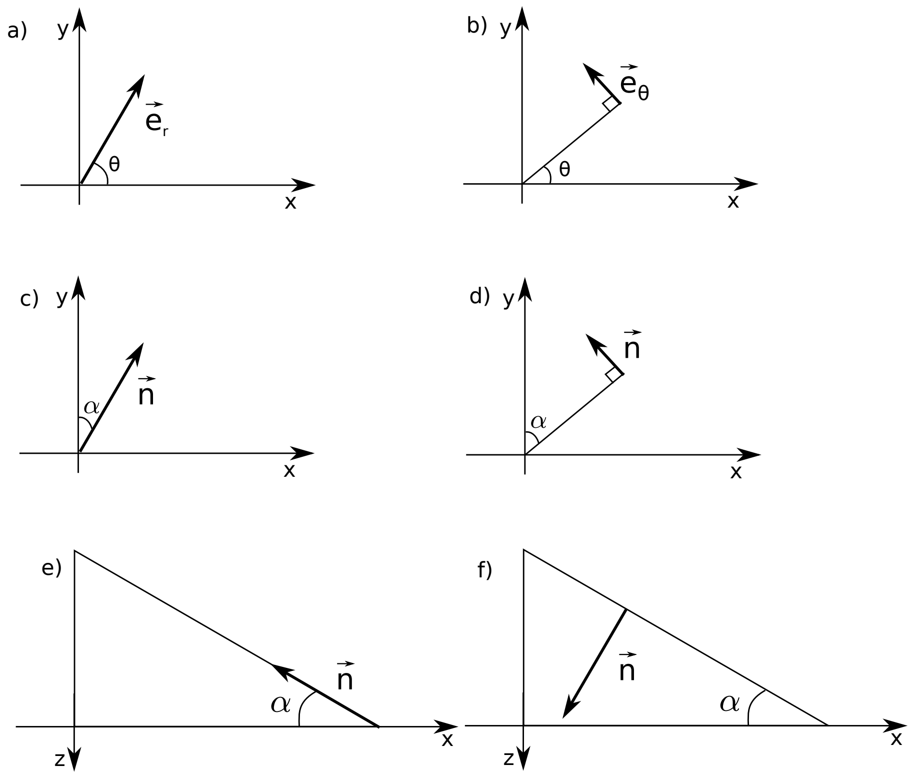
"Capexo"

Projection de vecteur et équations différentielles simples

Les "capexos" sont des exercices très courts qui portent sur une unique capacité (d'où le nom capexo). Une capacité peut être par exemple "écrire un vecteur dans une autre base", ou bien "intégrer une équation différentielle simple".
L'idée est que pour que ce type de capacité devienne un réflexe, *il faut pratiquer*. Votre objectif est donc d'enchaîner les capexos sur une capacité jusqu'à ce qu'ils vous paraissent automatiques.

I Écrire un vecteur dans une autre base

Dans chacun des cas suivants, exprimer le vecteur $\vec{n}$, $\vec{e}_\theta$, ou $\vec{e}_r$, en fonction des vecteurs de la base cartésienne $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et/ou $\vec{e}_z$.



Réponses :

a – $\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y$

b – $\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y$

c – $\vec{n} = \sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_y$

d – $\vec{n} = -\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y$

e – $\vec{n} = -\cos\alpha\,\vec{e}_x - \sin\alpha\,\vec{e}_z$

f – $\vec{n} = -\sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_z$

II Intégrer une équation différentielle simple

Dans chaque cas, donner la solution de l'équation différentielle. On ne précisera pas la valeur de la constante d'intégration (car on ne connaît pas les conditions initiales).

a. $f'(x) = a$ avec a constant.

b. $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho_0 g$ avec ρ_0 et g constants.

c. $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{P}{C}$ avec P et C constants.

d. $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \rho_0 g$ avec ρ_0 et g constants.

e. $\dot{\theta} = \omega_0$ avec ω_0 constant.

f. $f'(x) + a f(x) = 0$ avec a constant.

g. $\dot{u} + \dfrac{u(t)}{\tau} = 0$ avec τ constant.

h. $\dot{u} + \dfrac{u(t)}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$ avec E et τ constants.

i. $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \alpha\, i(t) + \beta$ avec α et β constants.

j. $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = \dfrac{T(s)}{c_p}$ avec c_p constant.

Réponses :
On note C la constante d'intégration.

a. $f(x) = ax + C$ **b.** $p(z) = -\rho_0 g z + C$ **c.** $T(t) = -\dfrac{P}{C}\, t + C$ **d.** $p(z) = \rho_0 g z + C$ **e.** $\theta(t) = \omega_0 t + C$

f. $f(x) = C\exp(-ax)$ **g.** $u(t) = C\exp(-t/\tau)$ **h.** $u(t) = C\exp(-t/\tau) + E$ **i.** $i(t) = C\exp(\alpha t) - \beta/\alpha$
j. $T(s) = C\exp(s/c_p)$